Vorkurs Mathematik für Studierende der Physik und verwandter Fächer, WS 17/18

Frank Wilhelm-Mauch

15. September 2017

Fachrichtung Physik, Universität des Saarlandes

Vorwort

Der Studieneinstieg ist ein neuer Abschnitt in Ihrem Leben und auch in der Intensität und Art des Lernens. In den MINT-Fächern wird die Sprache der Mathematik gesprochen und darum ist ein sicheres Beherrschen der Schulmathematik zwingende Voraussetzung. Der Vorkurs dient dazu, diesen Stoff zu wiederholen und vertieft einzuüben, so dass sie zum Studienstart ihn sicher beherrschen.

Der Besuch des Vorkurses kann viele Motivationen haben:

- leider bleibt in der Schule immer weniger Zeit, den behandelten Stoff so zu vertiefen, dass er problemlos sitzt. Wir sehen oft, dass zwar alle Mathematikthemen behandelt werden, aber leider nur noch so eingeübt wie man z.B. historische Daten wiedergeben kann, während Sie im Studium die Schulmathematik so beherrschen sollten wie das Fahrradfahren. Die Übungen zum Vorkurs helfen Ihnen, dieses Niveau abzusichern

- trotz Aussetzung der Wehrpflicht haben doch vielleicht einige von Ihnen eine Pause gemacht, für BFD, für eine Berufsausbildung oder ähnliches. Der Vorkurs kann Sie wieder an die Schulmathematik erinnern.

- Sie lernen schon vor Beginn des Studiums die Abläufe und die Lerntechniken für die Universität kennen - wie ist das, wenn Mathematik relativ zügig und anspruchsvoll behandelt wird. Sie lernen auch die Bedeutung des Übens kennen, ohne, dass es dafür Noten gibt

Der Vorkurs orientert sich am Inhalt der E-Kurse im Saarland. Er konzentriert sich auf den verpflichtenden Teil, deckt aber auch den fakultativen Teil ab. Er betont das sichere und zielgerichtete Rechnen.

Ein Skript ersetzt nicht die Vorlesung sondern dient zur Erleichterung der Mitschrift. Viele Lerner (einschließlich des Autors dieser Zeilen) können sich am besten konzentrieren, wenn sie mitschreiben - da ist das Skript aber dennoch eine gute Vor- und Nachbereitung. Die erste Auflage des Skripts wird auch einige Fehler enthalten - und kaum Zeichnungen, die zum Verständnis oft essenziell sind.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundbegriffe der Mathematik

Wir wiederholen einige Grundbegriffe der Logik und Zahlenräume und führen Notationen ein. In Ihren „echten“ Mathematikvorlesungen wird das sehr viel mehr Zeit einnehmen, als in praktisch orientierten Veranstaltungen wie dieser.

1.1 Aussagenlogik

Wir beschäftigen uns mit logischen Aussagen, die nur „falsch“ oder „wahr“ (oft geschrieben als 0 und 1) als Ergebnis haben können. Wie können wir diese verknüpfen? Sei a eine solche Aussage. Die einzige nicht banale Operation, die wir damit ausführen können ist die Negation $\neg a$ mit der Wahrheitstafel

a	$\neg a$
0	1
1	0

Klarerweise hebem sich zwei Negationen auf, $\neg\neg a = a$. Interessanter wird die Verknüpfung von zwei Aussagen a und b . Wir sagen a und b sind genau dann wahr, wenn beide wahr sind und schreiben

a	b	$a \wedge b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Wir sagen a oder b sind genau dann wahr, wenn mindestens eins von ihnen wahr ist. Die Wahrheitstafel ist

a	b	$a \vee b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Im Alltag benutzt man oft auch entweder-oder. In der Mathematik heißt dies Exklusiv-oder (XOR). Man schreibt dies als $a \oplus b$ in Reminiszenz an die binäre Addition und hat die Wahrheitstafel

a	b	$a \oplus b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Wir sehen, dass die Wahrheitstafel von $\wedge$der Multiplikation und $\vee$der Addition ähnelt. Man kann zeigen, dass das Distributivgesetz analog gilt

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge \mathrm{b}) \vee (a \wedge c)\,.$$

Das Verneinen einer logischen Operation tauscht die Operation und negiert die Einträge $\neg\,(a \wedge b) = \neg a \wedge \neg b$ bzw. $\neg\,(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$.

1.2 Logisches Schließen

Jetzt wollen wir das Schließen und Schlussfolgern als logische Operation behandeln. Was bedeutet „aus a folgt b“ ? Klarerweise muss, wenn a wahr ist auch b wahr sein. Was passiert, wenn a nicht wahr ist? Dann können wir keine Aussage treffen! Wenn a ist „es regnet“ und b „ich werde nass“, dann schließt das nicht aus, dass ich nass werde obwohl es gar nicht regnet (ich könnte auch schwimmen gehen oder in einen Bach fallen). Dem entgegengesetzt ist die *Äquivalenz* von Aussagen - a und b sind entweder beide richtig oder beide falsch.

Aussagenlogisch können wir schreiben

a	b	$a \Rightarrow b$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

und daraus ergibt sich dass $(a \Rightarrow b) = (\neg a \vee b)$ ist. Ferner können wir leicht überprüfen, dass $a \Leftrightarrow b = (a \Rightarrow b) \wedge (a \Leftarrow b)$ d.h. zwei Aussagen sind äquivalent wenn aus a b und aus b a folgt.

Wie Sie sehen können wir Logik in mathematische Hieroglyphen schreiben. Nützliche Symbole sind noch der Existenzquantor $\exists$ der bedeutet „es existiert“ und der Allquantor $\forall$ „für alle“. Wenn wir etwas über die Existenz aussagen, z.B. „es existiert eine natürliche Zahl, die eine Primzahl ist“ dann sagen wir nichts darüber aus, für wieviele Exemplare diese Aussage gilt außer, dass es mindetens eines ist. Damit ist die Negation einer Aussage $\exists a : a(x)$ auch $\neg\,(\exists a : a(x)) = \forall a : \neg a(x)$ und umgekehrt $\neg\,(\forall a : a(x)) = \exists x : \neg a(x)$.

1.3 Natürliche Zahlen

Als natürliche Zahlen bezeichnet man die Zahlen $1, 2, 3, \ldots$. Diese Menge schreibt man als $\mathbb{N}$. Möchte man die Null dazu nehmen, schreibt man $\mathbb{N}_0$. Insbesondere hat diese Menge ein kleinstes Element, und wenn man wiederholt die Zahl 1 dazuzählt arbeitet man alle Elemente ab. Wir können die Verkünpfungen $+$ und $\cdot$ auf dieser Menge definieren und das Ergebnis wird wieder darin liegen. Allerdings können wir es oft nicht umkehren: Für gegebenes $a, b \in \mathbb{N}$ hat $a + n = b$ nur dann eine Lösung $n \in \mathbb{N}$, wenn $b > 0$. Für den Fall $a \cdot n = b$ geht das nur, wenn$a$ein Teiler von b ist. Bevor wir uns anderen Zahlenmengen zuwenden, betrachten wir eine wichtige Anwendung der natürlichen Zahlen.

1.3.1 Vollständige Induktion

Die Vollständige Induktion ist eine Beweistechnik für Aussagen $a(n)$ die für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten sollen. Sie besteht aus drei Schritten:

1. dem Induktionsanfang: Wir zeigen die Aussage $a(1)$ für $n = 1$
2. der Induktionshypothese: Wir stellen die Hypothese auf, dass $a(n)$ gilt
3. dem Induktionsschritt: Wir zeigen, dass $a(n) \Rightarrow a(n + 1)$

Damit ist $a(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gezeigt, wir haben eine logische Schleife $a(1) \Rightarrow a(2) \Rightarrow \cdots \Rightarrow a(n-1) \Rightarrow a(n)$ aufgebaut.

Behandeln wir ein Beispiel: Es wird behauptet, dass

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n + 1)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Das zackige Symbol heißt Summenzeichen und ist eine Kurzschreibweise

$$\sum_{k=k_0}^{k_1} a(k) = a(k_0) + a(k_0 + 1) + \cdots + a(k_1)$$

für $k_1 \geq k_0$ und $= 0$ sonst (leere Summe). Als Induktionsanfang berechnen wir die linke Seite der obigen Gleichung bei $n = 1$ zu $\sum_{k=1}^{1} k = 1$ und die rechte Seite zu $\frac{1}{2} 1(1 + 1) = 1$. Der Induktionsanfang ist also bewiesen.

Als Induktionshypothese gehen wir davon aus, dass für ein gegebenes (beliebiges, aber ab jetzt festes) n die Aussage gilt.

Als Induktionsschritt berechnen wir die Aussagen für $n + 1$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n + 1)$$

mittels der Induktionshypotehse können wir dies umschreiben

$$\frac{1}{2} n(n + 1) + n + 1 = \frac{1}{2} (n + 1) (n + 2)$$

Das ist die Version der ursprünglichen Gleichung, die wir erhalten, wenn wir überall n durch $n+1$ ersetzen. Damit ist die vollständige Induktion gelungen.

1.4 Weitere Zahlenräume

1.4.1 Ganze Zahlen

Die ganzen Zahlen ergänzen die natürlichen Zahlen um die null und um das Negative zu jeder Zahl, $\mathbb{Z} = \{\dots, . -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ anders als in den natürlichen Zahlen kann hier jede Addition invertiert werden, d.h. zu $a, b \in \mathbb{Z}$ ist $a - b \in \mathbb{Z}$.

1.4.2 Rationale Zahlen

Jetzt wollen wir auch noch in der Lage sein, auch die Multikplikation zu invertieren. Dazu führen wir die Menge aller Brüche ein, die Rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} | q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Damit hat $\forall a, b \in \mathbb{Q}$, $b \neq 0$ die Gleichung$bq = a$ eine Lösung $q = a/b \in \mathbb{Q}$. Division durch Null ist nicht möglich.

Wir erinnern uns an die wichtigsten Rechenregeln für das Bruchrechnen

1. Kürzen: ist c ein Teiler von a und b, d.h. es ex. ganze Zahlen p, q so, dass $a = cp$ und $b = cq$, dann ist
$$\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$$
Das umgekehrte Manöver heißt Erweitern und wenn p und q teilerfremd sind heißt der Bruch vollständig gekürzt

2. Addition und Hauptnenner: Um Brüche zu addieren und zu subtrahieren wollen wir sie auf den gleichen Nenner bringen und dann die Zähler addieren
$$\frac{a}{b} + \frac{p}{q} = \frac{aq}{bq} + \frac{bp}{bq} = \frac{aq + bp}{bq}$$

3. Doppelbruch: Ein Bruch aus Brüchen kann sortiert werden
$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{p}{q}} = \frac{aq}{bp}.$$

Wir werden uns später noch mit Systemen linearer Gleichungen beschäftigen, wollen aber hier schon einmal den einfachen Fall von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten behandeln

$$ax + by = c$$
$$px + qy = r$$

Wir lösen die zweite Gleichung nach y auf und finden$y = (r - px)/q$. Das setzen wir in die erste Gleichung ein und erhalten

$$c = ax + \frac{b}{q}(r - px) = \frac{aq - bp}{q}x + \frac{br}{q}$$

also

$$x = \frac{cq - br}{aq - bp}$$

und mit dem Zwischenergebnis von oben erhalten wir

$$y = \frac{1}{q}\left(r - p\frac{cq - br}{aq - bp}\right) = \frac{raq - rbp - cpq + brp}{aq - bp}\frac{1}{q} = \frac{ra - cp}{aq - bp}.$$

Dies funktioniert nur, wenn $aq \neq bp$.

1.4.3 Reelle Zahlen

Bei genaurer Untersuchung, die Sie wahrscheinlich in der Schule gemacht haben und in den Anfängervorlesungen zur Mathematik wiederholen werden, haben Sie gelernt dass es auch Zahlen wieπ, e oder $\sqrt{2}$ gibt, die sich nicht als Brüche schreiben lassen. Wenn wir die mit dazu nehmen, erhalten wir die *reellen* Zahlen (formal sind das alle Grenzwerte von Folgen rationaler Zahlen). In denen können wir auch Wurzeln aus Zahlen $b > 0$, ziehen, also $a^2 = b$ lösen. Dies hat sogar immer zwei Lösungen, denn $(-a)^2 = (-1)^2a^2 = a^2$, d.h. die Wurzel ist nicht eindeutig. Als Konvention meinen wir wenn wir $a = \sqrt{b}$ schreiben immer die Lösung mit $a > 0$.

Wir können so auch allgemeinere quadratische Gleichungen lösen. Wir führen das Verfahren der quadratischen Ergänzung vor und leiten damit eine kompakte Lösungsformel her. Unsere Gleichung sei

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Wir versuchen, ein Binom ins Spiel zu bringen und schreiben

$$\begin{aligned} 0 &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}. \end{aligned}$$

Wir lösen auf zu

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}.$$

Jetzt können wir die Wurzel ziehen. Der erste Term der rechten Seite ist immer nichtnegativ. Damit das auch für die ganze rechte Seite gibt, muss $b^2 > 4ac$ sein. Dann haben wir

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

bzw.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Letzteres ist die Lösungsformel für quadratische Gleichungen. Jahrelang war es ein Element der Mathematikdidaktik, dies *Mitternachtsformel* zu nennen - wenn man Sie zu Mitternacht aufweckt und nach dieser Formel fragt, sollten Sie die wissen.

Wir werden unter den Teilmengen der reellen Zahlen insbesondere Intervalle oft benutzen. Ein Intervall, das die Endpunkte enthält heißt geschlossen. Für $a \leq b$ ist

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$$

und eines ohne die Endpunkte heißt offen

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}.$$

Daneben gibt es auch noch halboffene Intervalle wie $[a, b)$ und $(a, b]$. Wenn $a > b$ ist, ist das Intervall die leere Menge. Interessant ist der Fall $a = b$: Das geschlossene Intervall $[a, a]$ enthält genau ein Element, alle anderen sind leer.

1.4.4 Komplexe Zahlen

Jetzt wollen wir ein bisschen über den Tellerrand der Schule schauen. Wir mussten bei den reellen Zahlen die Einschränkung machen, dass wir aus negativen Zahlen keine Wurzel ziehen können. Zur Erweiterung auf die komplexen Zahlen definieren wir dies einfach: Die imaginäre Einheit i erfüllt die Eigenschaft $i^2 = 1$. Damit ist natürlich auch $(-i)^2 = -1$. Ansonsten sollen die gleichen Rechenregeln gelten, wie zwischen reellen Zahlen. Die Menge der komplexen Zahlen definieren wir als $\mathbb{C} = \{z = u + iv | u, v \in \mathbb{R}\}$. Wir nennen $u = Re(z)$ und $v = Im(z)$ den Real- bzw. Imaginärteil von z. Wir bezeichnen zu einer so dargestellten Zahl z die Zahl $\bar{z} = u - iv$ als zu $z$konjugiert komplexe Zahl. Wir können durch sie die nützlichen Identitäten

$$Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

hinschreiben. Wenn wir zwei komplexe Zahlen $z = u + iv$ und $c = a + ib$ verknüpfen, dann ist $z \pm c = (u + a) \pm i(v + b)$. Bei der Multiplikation haben wir $cz = (au - bv) + i(bu + av)$. Für weitere Betrachtungen ist es nützlich zu wissen, dass $\bar{c}\bar{z} = (au - bv) - i(bv + av) = (\bar{cz})$ ist, es also nicht darauf ankommt, in welcher Reihenfolge wir konjugieren und multiplizieren. Wie wir durch eine komplexe Zahl teilen, wissen wir gerade nicht so genau, aber wir können uns behelfen durch Erweitern

$$\frac{c}{z} = \frac{c\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{au + bv + i(bu - cv)}{u^2 + v^2}.$$

Der Nutzen der komplexen Zahlen sowie weitere Eigenschaften führen wir später ein, wenn wir mit gängigen Funktionen etwas flüssiger sind.

1.5 Funktionen

1.5.1 Allgemeine Eigenschaften

Mathematik beschäftigt sich in weiten Teilen mit Abbildungen bzw. Funktionen. Eine Funktion f bildet jedes Element ihrer Definitionsmenge D auf die Wertemenge W ab. Wir schreiben das als $f : D \to W$ und für ein $x \in D$ schreiben wir für den Funktionswert, also das Bild, $f(x) \in W$. Umgekehrt nennen wir für ein $y \in W$ ein Element $x \in D$ ein *Urbild* von y wenn $f(x) = y$. Einige Spezialfälle helfen uns, diese Mengen besser zu verstehen

1. Eine Funktion heißt *injektiv*, wenn es für jedes $y \in W$ höchstens ein $x \in D$ gibt, so dass $f(x) = y$, wenn es also niemals mehr als ein Urbild gibt.
2. Eine Funktion heißt *surjektiv*, wenn es für jedes $y \in W$ ein Urbild gibt. Das kann durch eine entsprechend restriktive Definition von W sichergestellt werden, wie wir unten anhand von Beispielen illustrieren werden.
3. Eine Funktion, die injektiv und surjektiv ist heißt *bijektiv* . Ist dies der Fall, dann können wir die Funktion umkehren, d.h. es existiert eine (bijektive) Funktion $f^{-1} : W \to D$ so, dass $f^{-1}(f(x)) = x$ ist.

Wir wollen einige Beispiele untersuchen:

1. Die Gerade $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f_1(x) = ax + b$ mit $a \neq 0$ ist bijektiv und es ist $f^{-1}(y) = (y - b)/a$.
2. Die Parabel: $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f_2(x) = x^2$ ist nicht surjektiv (zu $y < 0$ existiert kein Urbild) und nicht injektiv (ist x ein Urbild zu y , dann ist es auch $-x$).
3. Wenn wir den Wertebereich der Parabel auf $\mathbb{R}_0^+$einschränken, ist $f_2$surjektiv
4. Wenn wir den Definitionbereich der Parabel auf $\mathbb{R}_0^+$ einschränken, ist f_2 injektiv
5. Wenn wir Definitions- und Wertebereich der Parabel auf $\mathbb{R}_0^+$einschränken, ist f_2 bijektiv. Die Umkehrfunktion ist $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.
6. Die Funktion $f_3(x) : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}\setminus\{0\} : f_3(x)$ ist bijektiv und ihr eigenes Inverses.

1.5.2 Monotonie

Wir interessieren uns ob Funktionen steigen oder fallen.

- Eine Funktion heißt monoton wachsend, wenn $\forall x_{1/2} \in D$ mit $x_1 < x_2$auch $f(x_1) \leq f(x_2)$gilt.
- Eine Funktion heißt streng monoton wachsend, wenn $\forall x_{1/2} \in D$ mit $x_1 < x_2$auch $f(x_1) < f(x_2)$gilt.

- Eine Funktion heißt monoton fallend, wenn $\forall x_{1/2} \in D$ mit $x_1 < x_2$auch $f(x_1) \geq f(x_2)$gilt.
- Eine Funktion heißt streng monoton wachsend, wenn $\forall x_{1/2} \in D$ mit $x_1 < x_2$auch $f(x_1) > f(x_2)$gilt.

Betrachten wir wieder die Beispiele von oben. Wir haben

$$f_1(x_2) - f_1(x_1) = a(x_2 - x_1).$$

Wenn $x_2 > x_1$ist, dann ist dieser Ausdruck > 0 wenn $a > 0$ und < 0 wenn $a < 0$ ist (erinnern Sie sich daran, dass eine Ungleichung sich umdreht, wenn man mit einer negativen Zahl multipliziert / dividiert). Die Funktion ist in diesen Fällen also streng wachsend / fallend. Für f_2 können wir berechnen $f_2(x_2) - f_2(x_1) = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 + x_1)(x_2 - x_1)$. Nach Vorgabe ist der zweite Faktor positiv, es hängt also vom Vorzeichen von $x_1 + x_2$ab - die Funktion ist streng wachsend auf $\mathbb{R}_0^+$ / streng fallend auf $\mathbb{R}_0^-$.

1.5.3 Symmetrie

Eine Reihe der Probleme in der Mathematik, aber auch in der Physik, werden viel einfacher, wenn man die ihnen zugrundeliegende Symmetrie ausnutzen kann. Wir interessieren uns hier für die Symmetrie um den Ursprung. Eine Funktion heißt *symmetrisch* bzw. *gerade* , wenn $f(-x) = f(x)$ und *antisymmetrisch* bzw. *ungerade* wenn $f(-x) = -f(x)$. Wenn wir eine Funktion f gegeben haben, dann ist für alle x bei denen $\pm x$ im Definitionsbereich liegen die Funktion $f_g = f(x) + f(-x)$ gerade und $f_u = f(x) - f(-x)$ ungerade.

In unseren obigen Beispielen ist f_2 gerade, f_3 ist ungerade. f_1 hat im Allgemeinen keine keine Symmetrie. Nur in den Spezialfällen $b = 0$ (ungerade) und $a = 0$ (gerade) ist sie symmetrisch.

1.5.4 Verkettung

Wenn wir eine Funktion $f : A \to B$ haben und $g = B \to C$ dann können wir eine Funktion $h = g \circ f$ als Verkettung definieren. Es geht $h : A \to C$ und es ist $h(x) = g(f(x))$. Wir lesen die Verkettung von rechts nach links. Und auf die Reihenfolge kommt es an. So ist $f_1(f_2(x)) = ax^2 + b$ während $f_2(f_1(x)) = (ax+b)^2$ist. Bei praktischen Verkettungen müssen vor allen Dingen diese Mengen genau überprüft werden.

1.5.5 Stetigkeit für Fußgänger

Während die Eigenschaften bisher rein auf der Algebra beruhten, lugen wir jetzt etwas in die Analysis herein, die uns in der zweiten Woche noch sehr stark beschäftigen wird - mit dem Begriff der Stetigkeit. Die hemdsärmlige Definition von Stetigkeit ist, dass sich die Funktion mit einem Strich durchzeichnen lässt. In der Praxis können Funktionen also vor allen Dingen eine Reihe von *Unstetigkeitsstellen* haben, die wir hier näher charakterisieren möchten:

Endlicher Sprung Ein endlicher Sprung tritt auf, wenn die Funktion an der Unstetigkeitsstelle (dann auch Sprungstelle genannt) nicht ins Unendliche läuft. Ein Beispiel ist die sog. Signumsfunktion

$$f(x) = \mathrm{sign}(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

die einen Sprung bei $x = 0$ aufweist.

Polstelle Eine Polstelle ist eine Unstetigkeit, an der eine Funktion ins Unendliche läuft. So hat z.B. $1/x$ eine Polstelle bei $x \neq 0$. Formal kann man eine Polstelle dadurch identifizieren, dass dort die Funktion $1/f$ gegen Null geht. Noch präziser redet man von einer Polstelle n - ter Ordnung bei x_0, wenn n die größte Zahl ist, für die $(x - x_0)^n / f(x_0)$ noch gegen Null geht.

Hebbare Polstellen Manchmal gibt es Löcher im Definitionsbereich, durch die sich die Funktion eigentlich gerade durchzeichnen ließe. Ein praktisch wichtiges Beispiel dafür ist die *hebbare Polstelle.* Diese ensteht, wenn der Nenner und der Zähler einer Funktion gleichzeitig und in gleicher Ordnung gegen Null gehen. Ein Beispiel ist

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2 - 3x + 2} = \frac{x-2}{(x-2)(x+1)} = \frac{1}{x+1}.$$

Diese Funktion hat eine hebbare Polstelle bei $x = 2$.

1.5.6 Stetigkeit und Konvergenz

Die präzise Version der Stetigkeit kann über Folgen und Konvergenz konstruiert werden. Das werden Sie im ersten Semester in großem Detail machen (und Teile davon haben Sie schon in der Schule gesehen). Wir wollen hier nur die wichtigsten Aussagen wiederholen.

Wir starten von Zahlenfolgen $(a_n), \ n \in \mathbb{N}$. Diese heißen *konvergent,* mit Grenzwert a, wenn sie für großes n dem Wert a beliebig nahe kommt. Dabei muß a nicht zwingend exakt erreicht werden. Mathematisch sagt man: Für jeden vorgegebene $\epsilon > 0$ existiert ein n so dass $\forall k > n : \ |a_k - a| < \epsilon$. Wir schreiben dann$\lim_{n\to\infty} a_n = a$

Was hat das mit der Stetigkeit einer Funktion zu tun? Die Regel „mit einer Linie durchzeichnen“ ist äquivalent zu der Regel „egal, wie ich auf meinen Punkt x_0 zulaufe, es kommt immer der gleiche Grenzwert heraus“. Mathematisch ist also eine Funktion stetig wenn für jede Zahlenfolge $(x_n) \subset D$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f_0$ ist. Wenn $x_0 \in D$ dann ist $f_0 = f(x_0)$. Man schreibt dann auch $\lim_{x\to x_0} f(x_n) = f_0$.

Für die Physik reicht meist die Fußgänger-Definition. In der Mathematik nimmt man genere als Beispiel die Funktion $g(x) = \sin 1/x$ an der Stelle $x = 0$.

Wählen wir $x_n = 1/(n\pi)$ dann ist $f(x_n) = 0$ und wählen wir stattdessen die Folge $\xi_n = 1/((2n+1/2)\pi)$ dann ist $f(\xi_n) = 1$, obwohl beide Folgen gegen null gehen.

1.6 Elementare Funktionen

Wir wollen jetzt Beispiele von Funktionen kennenlernen, auf die wir im nächsten Kapitel auch immer wieder zurückkommen werden, sowie Rechentechniken, die für diese Funktionen wichtig sind. Diese bilden den Kanon der *elementaren Funktionen.* Natürlich ist das noch lange nicht alles, es gibt auch eine Reihe *spezieller Funktionen.* Die Unterteilung in diese Gruppe ist weitestgehend willkürlich. Funktionen werden definiert, weil sie einfache mathematische Beziehungen wiedergeben und/oder weil sie eine wichtige Aufgabe aus der Mathematik oder ihren Anwendungen - oft in der Physik - lösen. Auch in den Vorlesungen des Zyklus der theoretischen Physik werden Sie spezielle Funktionen anhand von Anwendungen kennenlernen.

1.6.1 Polynome

Eine Funktion

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad a_n \neq 0$$

nennen wir Polynom vom Grad n. Den Spezialfall $f(x) = a_n x^n$ nennen wir Monom. Der maximale Definitionsbereich eines Polynoms ist ganz $\mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) und es ist dort überall stetig. Genau dann wenn in einem Polynom nur gerade Potenzen auftreten

$$f_g(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{2k} x^{2k} \quad \Leftrightarrow \quad f_g(-x) = f_g(x)$$

und die analoge Aussage gilt im ungeraden Fall

$$f_u(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{2k+1} x^{2k+1} \quad \Leftrightarrow \quad f_u(-x) = -f_u(x).$$

1.6.2 Gebrochenrationale Funktionen

Wenn die Fuktionen p, q Polynome sind, dann nennen wir deren Bruch

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

eine gebrochenrationale Funktion. Gemeinsam mit den Polynomen bilden diese die Menge der rationalen Funktionen. Der maximale Definitionsbereich ist ganz

$\mathbb{R}$ bis auf die Nullestellen von $q(x)$. Dort treten Singularitäten auf. Interessant ist auch die Asymptotik für $x \to \pm\infty$: Wenn der Grad des Nenners größer ist als der des Zählers, existiert dieser Grenzwert und ist gleich null. Wenn der Grad des Zählers größer ist als der des Nenners, dann existiert der Grenzwert nicht. Wenn beide Polynome den gleichen Grad n haben, dann ist dieser Grenzwert das Verhältnis der Koeffizienten des höchsten Terms.

Es gibt zwei wichtige Techniken zur Umformung von gebrochenrationalen Funktionen.

1.6.2.1 Polynomdivision

Mit dieser Technik lässt sich ein Polynom von einer rationalen Funktion abspalten. Sie funktioniert, wenn der Grad von p größer als der von q ist. Wir suchen eine Lösung der Gleichung

$$p(x) = q(x)h(x) + r(x)$$

wobei h und r auch Polynome sind und der Grad von $r(x)$ kleiner als der von $q(x)$ ist. $r(x)$ ist der Divisionsrest. Wir schreiben

$$q(x) = \sum_{k=0}^{r} q_k x^k \quad p(x) = \sum_{k=0}^{r+s} p_k x^k \quad h(x) = \sum_{k=0}^{s} h_k x^k \quad s \geq 0.$$

Wir beginnen beim Term mit der höchsten Potenz. Das kann nach Konstruktion nur aufgehen, mit $h_s = p_{r+s}/q_r$. Wir berechnen

$$r_s(x) = p(x) - q(x)h_s x^s.$$

Dies ist ein Polynom vom Grad $r+s-1$. Wenn wir jetzt in der Konstruktion oben $p(x)$ durch r_s ersertzen, können wir den Schritt wiederholen und erhalten h_{s-1} und so weiter, bis wir das ganze $h(s)$ haben. Eine solche Regel, die wir immer wiederholen und in sich selbst einsetzen, nennen wir *Rekursion.* Sie endet, wenn $s = -1$ ist.

Als Beispiel betrachten wir den Fall $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ und $q(x) = x^2 - 3x + 2$. Damit ist $h(x)$ ein Polynom zweiter Ordnung. Wir haben $h_2 = 1$ und

$$r_3 = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 - x^2(x^2 - 3x + 2) = 4x^3 - x^2 + x + 1.$$

Damit hinden wir $h_1 = 4$ und

$$r_2 = 4x^3 - x^2 + x + 1 - 4x(x^2 - 3x + 1) = 11x^2 - 3x + 1.$$

Damit ist $h_0 = 11$. Der Divisionsrest ist

$$r = 11x^2 - 3x + 1 - 11(x^2 - 3x + 2) = 30x - 21.$$

Damit haben wir die Polynomdivision gelöst

$$p(x) = q(x)(x^2 + 4x + 11) + 30x - 21.$$

1.6.2.2 Parzialbruchzerlegung: Nichtentarteter Fall

Eine wichtige Technik zur Zerlegung von Rationalen Funktionen deren Nennergrad größer ist als der Zählergrad also z.B. nach einer Polynomdivision zur Vereinfachtung des Divisionsrestes. Wir gehen davon aus, dass der führende Term des Nenners $= 1$ ist (indem wir einen Vorfaktor abspalten) und dass die Nullstellen alle verschieden sind. Damit können wir Schreiben

$$q(x) = \prod_{k=1}^{r}(x - x_k) \quad x_k \neq x_l \text{ für } k \neq l.$$

Hier haben wir das Produktzeichen $\prod$ eingeführt, das ähnlich wie das Summenzeichen ein Produkt symbolisiert. Wir bezeichnen folgende Umformung als *Parzialbruchzerlegung*

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{k=1}^{r} \frac{r_k}{x - x_k}.$$

Die Aufgabe ist es jetzt, die Koeffizienten r_k (genannt *Residuen*) zu finden. Wir wählen ein $n \leq k$ beliebig aber fest aus und multiplizieren die Gleichung links und rechts mit $(x - x_n)$. Wir führen dann den Grenzübergang $x \to x_n$ durch. Auf der linken Seite steht

$$\lim_{x\to x_n}(x-x_n)\frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to x_n}\frac{(x-x_n)p(x)}{\prod_k(x-x_k)} = \lim_{x\to x_n}\frac{p(x)}{\prod_{k\neq n}(x-x_k)} = \frac{p(x_n)}{\prod_{k\neq n}(x_n-x_k)}.$$

Im zweiten Schritt haben wir die Nullstellenzerlegung von $q(x)$ ausgenutzt und den letzten Schritt können wir nur durchführen, weil alle Nullstellen verschieden sind. Die rechte Seite der obigen Gleichung ist

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_n}(x-x_n)\sum_k \frac{r_k}{x-x_k} &= \lim_{x\to x_n}\sum_k \frac{r_k(x-x_n)}{x-x_k}\\ &= \lim_{x\to x_n}\left[\sum_{k\neq n}\frac{r_k(x-x_n)}{x-x_k} + r_n\frac{x-x_n}{x-x_n}\right] = \sum_{k\neq n} 0 + r_n\\ &= r_n.\end{aligned}$$

Hier haben wir im letzten Schritt wiederum ausgenutzt, dass alle Nullstellen verschieden sind. Gleichsetzen liefert

$$r_n = \frac{p(x_n)}{\prod_{k\neq n}(x_n - x_k)}.$$

Dies zeigt auch, das die Parzialbruchzerlegung immer funktioniert.

Wir betrachten das Beispiel von oben: $p(x) = 30x - 21$ und $q(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$. Wir finden also $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$. Damit ist

$$r_1 = \frac{30 - 21}{1 - 2} = -9$$

und

$$r_2 = \frac{60-21}{2-1} = 39.$$

Wir haben also

$$\frac{30x-21}{x^2-3x+2} = \frac{-9}{x-1} + \frac{39}{x-2}$$

gezeigt.

1.6.2.3 Parzialbruchzerlegung: Allgemeiner Fall

Unsere Parzialbruchzerlegung beruhte darauf, dass wir den Nenner als ein Produkt von Nullstellenfaktoren mit paarweise verschiedenen Nullstellen zerlegen konnten. Was passiert, wenn das nicht geht? Eine Panne könnte sein, dass das Polynom vom Grad n weniger als n Nullstellen hat - es kann z.B. eine Parabel immer oberhalb der x- Achse liegen wie x^2+1. Im Fall der Parabel haben wir schon gelernt, dass wir im Zweifel immer komplexe Zahlen als Nullstellen finden können - im Beispiel wäre $x^2+1=(x+i)(x-i)$. Erfreulicherweise geht das für Polynome beliebigen Grades! Dieses Ergebnis heißt *Fundamentalsatz der Algebra* und wird in einer Ihrer Mathematikvorlesungen mit recht großem Aufwand bewiesen.

Das Andere, was schief gehen kann ist, dass Nennernullstellen zusammenfallen - es treten Pole höherer Ordnung auf. Diese müssen wir zuerst behandeln: Sei x_1 eine Nennernullstelle der Ordnung $s>1$. Dann setzen wir an

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{r_s}{(x-x_1)^s} + h(x)$$

wobei $h(x)$ eine rationale Funktion ist, deren Nenner bei x_1 höchstens eine Nennernullstelle vom Grad $s-1$ hat. Wir multiplizieren diese Gleichung mit $(x-x_1)^s$ und bilden wie gewohnt den Grenzwert um zu erhalten

$$r_s = \lim_{x\to x_1}\left[(x-x_1)^s\,\frac{p(x)}{q(x)}\right]$$

wobei die rechte Seite per Konstruktion konvergiert. Dies wiederholen wir mit $h(x)$ bis die Nennernullstellen alle abgespalten sind.

Als Beispiel betrachten wir

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{30x-21}{(x-1)^2}.$$

Wir schreiben

$$r_2 = \lim_{x\to 1}(30x-21) = 9$$

und erhalten

$$h(x) = \frac{30x-21}{(x-1)^2} - \frac{9}{(x-1)^2} = \frac{30}{x-1}.$$

Die Parzialbruchzerlegung ist also

$$\frac{30x-21}{(x-1)^2} = \frac{9}{(x-1)^2} + \frac{30}{x-1}.$$

1.6.3 Algebraische Funktionen

Bis jetzt haben wir uns mit ganzzahligen Exponenten unserer Variable x beschäftigt. Jetzt wollen wir beliebige (reelle) Exponenten zulassen. Wir haben bereits die Quadratwurzel $\sqrt{\cdot}$ als Umkehrfunktion von x^2 kennengelernt. Um der aus der Schule bekannten Potenzformel $(x^p)^q = x^{(pq)}$ gerecht zu werden identifizieren wir $\sqrt{x} = x^{1/2}$. Das Gleiche können wir mit den Umkehrfunktionen beliebiger Monome x^q machen und erhalten so $x^{1/q} =^q \sqrt{x}$. Damit können wir für rationale Exponenten definieren dass $x^{(p/q)} =^q \sqrt{x^p}$. Wenn wir jetzt einen reellen Exponenten haben, x^r , dann können wir diesen Ausdruck dadurch auswerten, dass wir den Exponenten beliebig gut durch eine rationale Zahl nähern.

Wenn wir allgemeine algebraische Funktionen wie $f(x) = x^r$ anschauen, dann können wir deutlich weniger sagen als für rationale Funktionen. Im Allgemeinen müssen wir für den Definitionsbereich beachten, dass $x \geq 0$ ist.

1.6.4 Die Exponenzialfunktion und der Logarithmus

Jenseits der rationalen und algebraischen Funktionen spricht man den (etwas altmodischen) Ausdruck der *transzendentalen Funktion.* Wir starten mit der Exponenzialfunktion, gegeben für ein beliebiges $a > 0$ als $f(x) = a^x$. Anders als bei rationalen Funktionen ist hier also nicht die Basis sondern der Exponent unsere Variable. Klarerweise ist

$$f(x+1) = af(x) \quad f(1) = a \quad f(0) = 1$$

Allgemein ist nach den Rechenregeln für Potenzen auch

$$f(x+y) = a^{x+y} = a^x a^y = f(x)f(y)$$

. Daraus kann man leicht sehen, dass $f(x)$ streng wachsend ist für $a > 1$ und streng fallend für $a < 1$. Für $a = 1$ ist $f(x) = 1$ konstant.

Wir können aufgrund dieser Rechenregeln zeigen, dass

$$1 = f(0) = f(x-x) = f(x)f(-x) \;\Rightarrow\; f(-x) = 1/f(x)$$

Der Wertebereich von $f(x)$ ist damit $\mathbb{R}^+$ - insbesondere ist für $a > 1$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ und für $x \to \infty$ geht $f(x)$ gegen ∞ .

Als streng monotone Funktion ist die Exponenzialfunktion auf ihrem gesamten Wertebereich umkehrbar. Die Umkehrfunktion heißt Logarithmus zur Basis a $\log_a x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ . . Die Rechenregeln für die Exponenzialfunktion drehen sich um zu

$$\log_a a = 1 \quad \log_a 1 = 0 \quad \log_a x^y = y \log x \quad \log_a 1/x = -\log_a x.$$

Aus den Potenzgesetzen ergibt sich

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \quad \log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y.$$

Wir können auch leicht zeigen, wie man die Basis wechselt. Wir verifizieren

$$a^{\log_a x} = x = b^{\log_b x} = \left(a^{\log_a b}\right)^{\log_b x} = a^{\log_a b \log_b x}$$

also

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Eine besondere Basis für Exponenzialfunktion und Logartihmus ist die (irrationale) Eulersche Zahl $e \simeq 2.718\ldots$. Den Logarithmus zu dieser Basis nennt man auch natürlichen Logarithmus $\log_e \equiv \ln$. Was diese Zahl besonders macht könnten wir hier schon mit den Mitteln der Algebra erschließen (und das werden sie in einer Ihrer ersten Mathematikvorlesungen auch tun) - im Vorkurs verschieben wir dieses Argument aber auf das Kapitel Analysis.

1.6.5 Trigonometrische Funktionen

Trigonometrische Funktionen werden im Allgemeinen anhand rechtwinkliger Dreiecke eingeführt. Hier messen wir Winkel stets im Bogenmaß. Es ist für Winkel $0 \leq x \leq \pi/2$

$$\sin x = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \quad \cos x = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}.$$

Damit wird aus dem Satz von Pythagoras sofort

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

und durch Spielegung des Dreiecks sieht man $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Die Funktionen sind damit auch beschränkt, $|\sin x|, |\cos x| \leq 1$ wobei $\cos 0 = \sin \pi/2 = 1$ ist. Was passiert bei kleinem x ? Dann ist die Bogenlänge etwa gleich der Gegenkathete und wir haben $\sin x \simeq x$ (später lernen wir eine bessere Schreibweise). Aus dem Pythagoras folgt $\cos^2 x \simeq 1 - x^2/2$.

Was machen wir für $x$außerhalb des durch einfache Dreiecke beschreibbaren Bereiches? Klar ist, dass Überschreiten des Winkels um eine volle Drehung nichts ändert, die Funktionen sind also 2πPeriodisch

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x.$$

Wenn wir den Winkel auf negative Werte drehen, änder auch die Gegenkathete ihre Orientierung, die Ankatehete aber nicht. Damit haben wir

$$\sin(-x) = \sin x \quad \cos(-x) = \cos x.$$

Damit ergeben sich die bekannten Funktionsgraphen. Insbesondere ergeben sich folgende spezielle Werte für $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \sin(n\pi) &= 0 & \cos(\pi(n + 1/2)) &= 0 \\ \sin\left(\pi\left(2n + \frac{1}{2}\right)\right) &= 1 & \sin\left(\pi\left(2n - \frac{1}{2}\right)\right) &= -1 \\ \cos(2\pi n) &= 1 & \cos\left(\pi\left(2n + 1\right)\right) &= -1 \end{aligned}$$

Zusätzlich gibt es noch die Tangensfunktion

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Auch diese ist 2πperiodisch. Der Tangens hat einfache Pole an den Nullstellen des Kosinus und ist ungerade. Seltener wird auch der Kotangens

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

verwendet.

Durch den periodischen Charakter sind die trigonometrischen Funktionen nur auf Intervallen umkehrbar. Diese können mit einer gewissen Freiheit gewählt werden - man sagt, sie haben mehrere Äste. Die Umkehrfunktion des Sinus heißt Arcussinus

$$\sin^{-1} x = \arcsin x : \ [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

und analog haben wir Arcuskosinus und Arcustangens

$$\begin{aligned} \arccos x \ &: \ [-1:1] \to [0:\pi] \\ \arctan x \ &: \mathbb{R} \to \left[-\frac{\pi}{2} : \frac{\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

1.6.6 Hyperbelfunktionen

Diese Funktionen haben Sie evtl. in der Schule noch nicht gesehen, sie sind aber ganz einfach. Wir definieren den Sinus Hyperbolicus und den Cosinus Hyperbolicus als

$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \quad \cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$

sowie den Tangens Hyperbolicus

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

Diese Funktionen sind nicht periodisch. Der cosh ist gerade, der sinh ist ungerade. Sie sind auf $\mathbb{R}$ definiert und haben keine Singularitäten. Für $x \to \pm\infty$ dominiert jeweils eine der Exponenzialfunktionen und $\cosh x \to \infty$, $\sinh x \to \pm\infty$. Beim Tangens gleichen sich diese aus, also ist

$$\lim_{x\to\pm\infty} \tanh x = \pm 1.$$

Der Sinus Hyperbolicus ist invertiertbar auf $\mathbb{R}$, der Kosinus auf $\mathbb{R}_+$. Wir können die Umkehrfunktionen, genannt Areasinus/kosinus Hyperbolicus durch Logarithmen darstellen. Als Beispiel betrachten wir den sinh

$$y = \sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \Rightarrow e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung in der Variablen e^x mit Lösung

$$e^x = \frac{1}{2}\left(2y \pm \sqrt{4y^2+4}\right) = y + \sqrt{y^2+1}$$

wobei wir im letzten Schritt uns für die positive Lösung entschieden haben. Damit ist

$$\mathrm{Arsinh} y = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right).$$

Wir sehen durchaus Analogien zwischen den trigonometischen und den Hyperbelfunktionen aber die sieht auf ersten Blick etwas zu schwach aus, um diese Namensgebung zu rechtfertigen. Wir werden später eine deutlich engere Beziehung zwischen diesen Funktionen sehen.

Kapitel 2

Analysis

In der Analysis betrachten wir Eigenschaften von Funktionen, die sich aufgrund der Infinitesimalrechnung entstehen, primär Ableitungen und Integrale.

2.1 Ableitungen

Die Ableitung ist direkt aus physikalischen Fragestellungen motiviert. Wenn Sie z.B. die Durchschnittsgeschwindigkeit eines Objektes über eine Zeit $\Delta t = t_2 - t_1$ hinschreiben wollen, messen Sie einfach den Ort zu diesen beiden Zeiten und enthalten

$$v_{av} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{x(t_1 + \Delta t) - x(t_1)}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Diese Durschnittsgeschwindigkeit hat aber keine besonders hohe Aussagekraft: Wenn Sie mit dem Fahrrad von der Saar zur Goldenen Bremm und wieder zurück fahren, dann haben Sie vielleicht eine Durschnittsgeschwindigkeit von 15 km/h. Wenn Sie das Intervall Δt kürzer machen - z.B. t_2 auf die Ankunft an der Goldenen Bremm legen, dann sehen Sie eine Durschnittsgeschwindigkeit von vielleicht 8 km/h weil es stark bergauf geht, und die Geschwindigkeit auf der Rückfahrt ist deutlich höher. Wenn Sie jetzt den Aufstieg noch einmal in zwei Teile trennen sehen Sie, dass Sie mit der Zeit immer müder werden und die Durchschnittsgeschwindigkeit im zweiten Intervall niedriger ist als im zweiten. Am aussagekräftigsten ist die Geschwindigkeit in einem infinitesimal kurzen Intervall, die Momentangeschwindigkeit

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \equiv \frac{dx}{dt}.$$

Die so definierte Differenzialschreibweise mit dx und dt beschreibt infinitesimal kleine Intervalle, die simultan gegen null gehen. Wir sehen in der ersten Gleichung, dass der Nenner gegen null geht und der Ausdruck nur dann konvergiert, wenn der Zähler mindestens genau so schnell gegen null geht - die Grenzwerte haben also nur gemeinsam Sinn und zur Existenz dieses Ergebnisses ist Stetigkeit eine notwendige, nicht aber eine hinreichende Voraussetzung. Diese Überlegung definiert die Ableitung einer Funktion $f(x)$ als

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \equiv \frac{df}{dx}$$

Als Beispiel berechnen wir die Ableitung eines Monoms $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Wir wissen anhand des Pascalschen Dreiecks dass

$$(x+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) x^{n-k} h^k = x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} h^2 + \dots.$$

Damit ist

$$(x^n)' = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left((x+h)^n - x^n\right) = \lim_{h\to 0} \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} h^2 + \dots \right) = nx^{n-1}.$$

2.2 Ableitungsregeln

Zur Konstruktion weiterer Ableitungen beschaffen wir uns zunächst einige Regeln

2.2.1 Linearität

Wenn f und g differenzierbare Funktionen sind und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ dann ist

$$\begin{aligned}(\lambda f + \mu g)' &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\lambda f(x+h) + \mu g(x+h) - \lambda f(x) - \mu g(x)\right) \\ &= \lambda \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(f(x+h) - f(x)\right) + \mu \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(g(x+h) - g(x)\right) \\ &= \lambda f' + \mu g'.\end{aligned}$$

Damit können wir aus der Ableitung von Monomen sofort die vom Polynomen konstruktieren

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right)' = \sum_{k=1}^{n} a_k k x^{k-1}$$

2.2.2 Produktregel

Wenn f und g differenzierbare Funktionen sind, dann ist

$$(fg)' = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)\right).$$

Wir schieben eine nahrhafte Null in der Form $-f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h)$ ein

$$\begin{aligned}(fg)' &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(f(x+h) - f(x)\right) g(x+h) + \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} f(x) \left(g(x+h) - g(x)\right) \\ &= f'g + fg'.\end{aligned}$$

Mit der Produktregel haben wir eine alternative Methode, die Ableitungen der Monome konstruieren, ohne auf das Pascalsche Dreieck zurückzugreifen. Wir gehen per vollständiger Induktion vor:

Als Induktionsanfang sehen wir leicht, dass $\left(x^0\right)' = 0$ ist. Wenn wir davon ausgehen dass für gegebenes n bereits $(x^n)' = nx^{n-1}$ ist, dann ist als Induktionsschritt

$$\left(x^{n+1}\right)' = (x^n x)' = nx^{n-1}x + x^n = (n+1)x^n$$

2.2.3 Kettenregel

Wir betrachten jetzt eine Verkettete Funktion $h(x) = f(g(x))$. Ihre Ableitung berechnen wir durch Erweiterung

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} &= \lim_{g(x+h)\to g(x)}\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\times \\ &\times \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &= \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx} = f'(g)g'(x)\end{aligned}$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass differenzierbare Funktionen mindestens auch stetig sind. Hier benutzen wir die Schreibweise für die Ableitung mit dem Strich etwas genauer - sie bedeutet immer die Ableitung nach dem *Argument* der Funktion. Das Multiplizieren mit der inneren Ableitung g' nennt man auch *Nachdifferenzieren.*

2.2.4 Quotientenregel

Wenn $n(x)$ eine differenzierbare Funktion ist, dann können wir außerhalb ihrer Nullstellen die Ableitung ihres Kehrwertes mit der Kettenregel bestimmen als

$$\left(\frac{1}{n}\right)' = -\frac{n'}{n^2}.$$

Für einen Bruch können wir jetzt die Produktregel damit kombinieren

$$\left(\frac{z}{n}\right)' = \frac{z'}{n} - \frac{zn'}{n^2} = \frac{nz' - zn'}{n^2}.$$

Den Zähler kann man sich als „NAZ-ZAN“-Regel (Nenner mal Ableitung Zähler minus Zähler mal Ableitung Nenner) merken. Mit der Quotientenregel können wir die Ableitung von Kehrwerten von Monomen bilden: Sei $n \in \mathbb{N}$dann ist

$$\left(x^{-n}\right)' = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$$

Damit haben wir gezeigt, dass für alle $z \in \mathbb{Z}$gilt dass $(x^z)' = zx^{z-1}$.

2.2.5 Umkehrfunktion

Sei f eine in der Umgebung eines gegebenen x umkehrbare, stetig differenzierbare Funktion. Dann ist

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{x+h-h} = \lim_{k\to 0} \frac{y+k-y}{f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)} = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))}$$

oder kurz

$$\frac{df}{dx} = \left(\frac{dx}{df}\right)^{-1}.$$

Mit entsprechender Variablensubstitution können wir also kurz schreiben

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Als Beispiel können wir uns die Wurzeln anschauen. Es sei $f(x) = x^z$, $z \in \mathbb{Z}$. Dann ist $f^{-1}(x) = x^{1/z}$. Die Ableitung ist

$$\left(x^{1/z}\right)' = \frac{1}{z(x^{1/z})^{z-1}} = \frac{1}{z}x^{1/z-1}.$$

Damit ist es ein kurzer Weg, für jeden rationalen Exponenten $q \in \mathbb{Q}$, $q = p/n$, $p, n \in \mathbb{N}$ zu zeigen dass $(x^q)' = \left(\left(x^{1/n}\right)^p\right)' = qx^{q-1}$ ist. Da sich jede reelle Zahl beliebig durch rationale Zahlen annähern lässt, gilt diese Formel auch für reelle Exponenten.

2.3 Kurvendiskussion

Die Ableitung erzählt uns einiges über die Funktion. In einem Punkt mit $f'(x) > 0$ ist die Funktion in einer Umegbung streng wachsend, bei $f'(x) < 0$ enstprechend streng fallend. Wenn $f'(x) = 0$ ist, ist die Tangente horizontal, es tritt ein Extremum auf. Wenn die Ableitung dort von positiv nach negativ wechselt handelt es sich um ein Maximum, wenn sie andersherum wechselt um ein Minimum. Wenn die Ableitung das Vorzeichen nicht wechselt, dann spricht man von einem Sattelpunkt. Diese Eigenschaften lassen sich auch mit der zweiten Ableitung, der Ableitung der Ableitung, beschäftigen. Wenn die zweite Ableitung postiv ist, bedeutet das, dass die Ableitung wächst, wenn sie negativ ist fällt die Ableitung. Dazwischen befinden sich Wendepunkte. Wenn in einem Extremum die zweite Ableitung positiv ist, muss es somit ein Minimum sein, wenn sie negativ ist, muss es ein Maximum sein.

2.4 Anwendungen und Spezialfälle

Wir haben uns bereits von den Ableitungen von Potenzgesetzen und algebraischen Funktionen überzeugt entlang der Beispiele bei den Rechenregeln.

2.4.1 Exponenzialfunktion

Betrachten wir die Exponenzialfunktion $f(x) = a^x$. Es ist

$$f_a'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}.$$

Wir sehen nun, dass der Ausdruck, dessen Grenzwert wir nehmen, nicht mehr von der Variablen x abhängt - die Ableitung von f_a (x) ist also proportional zu dieser Funktion. Diese Zahl ist gleich $f_a'(0)$. Anhand des Funktionsgrahen können wir uns leicht davon überzeugen, dass dieser Grenzwert existiert.

Ein wichtiger Spezialfall ist der Fall, in dem $f_a'(0) = 1$ ist. Das a mit dem das passiert heißt Eulersche Zahl e mit numerischem Wert $e \simeq 2.718\ldots$. Davon ausgehend, können wir schreiben $f_a(x) = a^x = e^{x \ln a}$. Mit der Kettenregel finden wir $f_a' = \ln a \; a^x$.

2.4.2 Logarithmus

Hier können wir die Regel für die Umkehrfunktion nutzen. Wir starten mit dem natürlichen Logarithmus.

$$(\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

2.4.3 Trigonometrische Funktionen

Die Ableitungen von Sinus und Kosinus stellen ein typisches Henne-und-Ei-Problem dar - in der Analysis zu Studienbeginn werden Sie einen sehr eleganten Zugang dazu kennenlernen, indem Sie diese Funktionen gleich über die Analysis einführen, nicht über die Geometrie. Dazu benötigen Sie aber erst die Theorie der Potenzreihen, deren systematische Behandlung dieses Vorkurs sprengen würde.

Wenn wir eine Kurvendiskussion des Sinus grafisch durchführen (an der Tafel in der Vorlesung) dann sehen wir leicht, wie die Extrema und Wendepunkte dieser Funktionen zusammenpassen: Die Extrema des Sinus sind die Nullstellen des Kosinus und umgekehrt. Tatsächlich kann man zeigen, dass $\sin' x = \cos x$ ist und $\cos' x = -\sin x$.

Damit erhalten wir leicht die Ableitung des Tangens über die Quotientenregel

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x - (-\sin^2 x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Die Arcusfunktionen erhalten wir über die Umkehrfunktionsregel

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \arcsin x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Ein weiteres interessantes Beispiel ist

$$(\arctan x)' = \cos^2(\arctan x),$$

Um damit zurecht zu kommen, rechnen wir

$$\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

also

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$$

damit heralten wir

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

2.4.4 Hyperbelfunktionen

Diese können wir leicht differenzieren als $(\cosh x)' = \sinh x$ und $(\sinh x)' = \cosh x$.

2.5 Ausblick: Taylorreihen und komplexe Exponenzialfunktion

Dieses Thema wird in der Schule bestenfalls angerissen, wird aber an der Uni sehr schnell eine Rolle spielen. Die subtilen Fragestellung, unter welchen exakten Vorausetzungen die Formeln hier gelten überlassen wir der Mathematik.

2.5.1 Taylorreihe

Wir erinnern uns an die Ableitungen von Polynomen

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \;\Rightarrow\; p'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}(k+1)x^k.$$

Insbesondere finden wir dass $p'(0) = a_1$ ist. Wir können dies weitertreiben zu

$$p''(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+2}(k+2)(k+1)x^k \;\Rightarrow\; p^{''}(0) = 2p_2.$$

Wir können dies weitertreiben zu der Formel

$$p_k = \frac{p^{(k)}(0)}{k!}.$$

Wir können also die Koeffizienten des Polynoms über die Ableitungen bei $x = 0$ rekonstruieren.

Der Satz von Taylor sagt jetzt, dass dies für hinreichend vernünftige Funktionen (unenldlich oft differenzierbar in einer Umgebung eines Punktes x_0 dass wir schreiben können

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

ein solches „Polynom unendlicher Ordnung“ nennt man eine Potenzreihe. Dies ist als Grenzwert $n \to \infty$ eines Polynoms vom Grad n zu sehen. Die Frage der Existenz dieses Grenzwertes ist durchaus subtil: Als Beispiel betrachten wir $f(x) = \frac{1}{1-x}$ und $x_0 = 0$. Wir haben

$$f(0) = 0 \quad f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \; f'(0) = 1$$

$$f^{''}(x) = \frac{2}{(1-x)^3} \; f''(0) = 2 \dots f^{(k)} = k!.$$

Damit haben wir

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad |x| < 1.$$

Dies heißt *geometrische Reihe.*

2.5.2 Taylorreihen elementarer Funktionen

Für die natürlich Exponenzialfunktion $f(x) = e^x$ ist $f'(x) = e^x = f(x)$. Damit sind sogar alle Ableitungen gleich und es ist $f^{(n)}(0) = 1$. Die Reihenentwicklung ist

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Für den natürlichen Logarithmus ist das schon schwieriger, denn er ist ja für $x < 0$ nicht definiert. Wir können aber anschauen $f(x) = \ln(1-x)$. Dann ist nämlich $f'(x) = \frac{1}{1-x}$ und die Konstruktion ähnelt der geometrischen Reihe

$$\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}.$$

Für den Sinus, also $f(x) = \sin x$ haben wir $f' = \text{cosx}$,$f''(x) = -\sin x$, $f^{(3)}(x) = -\cos x$ und $f^{(4)}(x) = \sin x$. Damit haben wir für alle $n \in \mathbb{N}$, also $f^{(2n)} = (-1)^n \sin x$ und $f^{(2n+1)} = (-1)^n \cos x$. Das führt zu Ableitungen $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$ und $f^{(2n)}(0) = 0$. Die Potenzreihe ist somit

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots$$

Analog finden wir

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots.$$

Ferner betrachten wir noch allgemeine Potenzen der Form $f_\alpha(x) = (1+x)^\alpha$. Hier ist $f'_\alpha(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$ und somit $f'_\alpha(0) = \alpha$. Daraus entsteht $f''_\alpha =$

$\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$, $f''_\alpha(0)$=$\alpha(\alpha$-1) . Dies weitergetrieben liefert $f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1) = \prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)$. Damit erhalten wir als Reihenentwicklung die *binomische Reihe*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \alpha \\ n \end{pmatrix} x^n \qquad \begin{pmatrix} \alpha \\ n \end{pmatrix} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)}{n!}.$$

Das Symbol $\begin{pmatrix} \alpha \\ n \end{pmatrix}$ ist eine Verallgemeinerung des aus dem Pascalschen Dreieck bekannten Binomialkoeffizienten. Sie können sich auch leicht davon überzeugen, dass diese für natürliches α und $n > \alpha$verschwinden, so dass aus der obigen unendlichen Reihe ein Polynom wird, im Einklang mit der binomischen Formel. Bei diesen Formeln ist auch darauf zu achten, dass sie nur für $|x| < 1$ gelten. Ein für die Physik wichtiger Spezialfall ist $x = 1/2$. Dort fängt die Reihe an wie

$$(1+x)^{1/2} = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \ldots$$

2.5.3 Die komplexe Exponenzialfunktion

Mit der Reihenentwicklung können wir eine verblüffende Umgebung machen. Wir sortieren die komplexe Exponenzialfunktion mit $x \in \mathbb{R}$als

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} i^k = 1 + ix - \frac{x^2}{2} - i\frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \ldots$$

in Real- und Imaginärteil. Die geraden Potenzen in der Reihe sind reell und die ueraden sind imaginär, wobei die Vorzeichen alternieren

$$e^{ix} = \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s \frac{x^{2s}}{2s!} + i\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s \frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!} = \cos x + i \sin x.$$

Damit werden die komplexe Exponenzialfunktion mit Sinus und Kosinus verbunden! Umgekehrt ist

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Dies bestätigt die Darstellung der komplexen Zahen in einer Ebene und legt die Definizionen $|z| = \sqrt{(\mathrm{Re}z)^2 + (\mathrm{Im}z)^2}$ nahe. Das Argument einer komplexen Zahl ist dann $\arg z = \arctan \frac{\mathrm{Im}z}{\mathrm{Re}z}$.

Es gibt Halbwinkelformeln wie

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{4}\left(e^{ix/2} + e^{-ix/2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{ix} + e^{-ix} + 2\right) = \frac{1}{2}(1 + \cos x).$$

Und schlussendliche Überlagerungsformeln wie

$$\begin{aligned}\cos x + \cos y &= \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix} + e^{iy} + e^{-iy}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{i\frac{x+y}{2}}\left(e^{i\frac{x-y}{2}} + e^{i\frac{-x+y}{2}}\right) + e^{-i\frac{x+y}{2}}\left(e^{-i\frac{x-y}{2}} + e^{-i\frac{x-y}{2}}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.\end{aligned}$$

Für uns ist dies im Augenblick vor allen Dingen nützlich zur Nutzung der reichhaltigen Rechenregen für die Exponenzialfunktion zum Nachweis von Additionstheoremen für die trigonometischen Funktionen - für die Sie in der Schule typischerweise geometrische Konstruktionen benötigt haben. Hier einige Kostproben. Was ist der Sinus der Summe von Argumenten als Funktion von einfacheren Winkelfunktionen? Der komplexe Ausdruck ist

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \frac{1}{2i}\left(e^{i(x+y)} - e^{-i(x+y)}\right) \\ &= \frac{1}{2i}\left[(\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y) - (\cos x - i\sin x)(\cos y - i\sin y)\right] \\ &= \frac{1}{2i}\left[2i\sin x\cos y + 2i\cos x \text{siny}\right] = \sin x\cos y + \cos x\sin y.\end{aligned}$$

Als Spezialfall haben wir $\sin 2x = 2\sin x\cos x$. Wir können so auch den Pythagoras nachweisen ohne die Geometrie zu bemühen

$$\cos^2 x + \sin^2 x = \frac{1}{4}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^2 = 1.$$

2.5.4 Der Satz von de l'Hôpital

Mittels der Taylorreihenentwicklung können wir ein Wundermittel zur Behandlung von hebbaren Singularitäten herleiten. Seien f, g differenzierbare Funktionen mit $f(x_0) = g(x_0) = 0$ und $g'(x_0) \neq 0$. Dann ist offensichtlich $f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + O\left((x-x_0)^2\right)$ und $g$analog und

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Das gleiche lässt sich zeigen, wenn f und g bei x_0 eine Singularität haben. Dann können wir nämlich so vorgehen

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} = \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{g'}{g^2}}{\frac{f'}{f^2}}.$$

Dies können wir zur analogen Formel zu oben auflösen. Verkürzt spricht man oft von de l'Hôpital $\frac{0}{0}$ und de l'Hôpital $\frac{\infty}{\infty}$.

Aus dieser Regel können wir wichtige Faustregeln ableiten:
Die Exponenzialfunktion wächst schneller als alle Polynome, d.h.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^s}{e^x} = 0.$$

Dies können wir durch Induktion für natürliches s zeigen. Für $s = 0$ ist es klar. Für den Induktionsschritt nehmen wir de l'Hôpital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{s+1}}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(s+1)x^s}{e^x} = 0$$

Da für jede reele Zahl eine größere natürliche Zahl existiert, gilt es auch für reelle s . Das Gegenteil gilt für den Logarithmus. Es ist für $s > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^s} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{sx^{s-1}} = \frac{1}{s} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^s} = 0.$$

2.6 Integration

Jetzt beschäftigen wir uns mit dem umgekehrten Vorgang zur Differenziation, der Intergation. Während Differentiation tendenziell Formeln länger macht und Funktionen mehr oszillieren lässt, tendiert Integration zum Glätten und Vereinfachen. Dafür erfordert sie etwas mehr geschick - manche Leute sagen, „Ableiten ist Handwerk, Integrieren ist Kunst“.

In Ihren Mathematikvorlesungen werden Sie erst einmal ausführlich verschiedene Integralbegriffe diskutieren, die weitreichende Verallgemeinerung erlauben. Hier starten wir mit einem pragmatischerem Ansatz.

2.6.1 Die Stammfunktion

Gegeben eine vernünftige Funktion (wir werdens ehen, dass dies im Wesentlichen „nichsingulär“ bedeutet) $f(x)$ dann nennen wir die Funktion $F(x)$ die Stammfunktion von $f(x)$ wenn $F'(x) = f(x)$. Diese ist nicht eindeutig: Ist F eine Stammfunktion von f dann ist $F_a(x) = F(x) + a$ mit einer beliebigen Konstanten a ebenfalls eine Stammfunktion. Wir schreiben diese Beziehung auch als *unbestimmtes Integral*

$$F(x) = \int^x f\left(x'\right) dx' = \int^x dx'\ f(x').$$

Hier sind einige Konventionen zu beachten: Wir interpretieren das Integral als Funktion der oberen Grenze x . Die Integrationsvariable, von der die Ableitung abhängt und die durch das dx' andgedeutet wird, muss dann eine andere Variable sein - der Vorgang des Integrierens führt zu einem Objekt das nicht mehr von der Integrationsvariablen abhängt. Sie sehen zwei Formeln, in der einmal die Integrationsvariable am Ende der Formel steht (was Sie vermutlich in der Schule schon gesehen haben) - dies bildet eine klare Klammer um den Integralausdruck und ist in der Mathematik sehr gebräuchlich. Wenn wir die Integrationsvariable direkt hinter das Integralsymbol schreiben betonen wir, dass die Integration nach x' eine Operation auf den Ausdruck rechts davon ist - dies ist in der Physik gebräuchlicher. Hier sehen Sie ein Beispiel, dass es kein „richtig“ oder „falsch“ in Konventionen gibt - dies sind Verabredungen zur Kommunikation zwischen Menschen, sie müssen sinnvoll und eindeutig und praktisch sein.

Aus der Diskussion elementarer Funktionen können wir sofort eine Beispiele von Stammfunktionen angeben

- $f(x) = x^s \quad s \neq -1 : F(x) = x^{s+1}/(s+1)$
- $f(x) = 1/x$: $F(x) = \ln \mathrm{x}$
- $f(x) = \exp x : F(x) = \exp x$
- $f(x) = \cos x$: $F(x) = \sin x$
- $f(x) = \sin x : F(x) = -\cos x$

2.6.2 Interpretation und bestimmtes Integral

Wie in der Vorlesung durch eine Zeichnung illustriert werden wird, nehmen wir zunächst an unsere Funktion ist in dem uns interessierenden Berich nichtnegativ, $f(x) \geq 0$. Wir bestimmen jetzt die Fläche, die entsteht, wenn man in die Kurve zwischen x_1 und x_2 , $x_2 \geq x_1$ Rechtecke mit der Ausdehnung $h = \frac{x_2 - x_1}{N}$ in x - Richtung einbeschreibt. Diese können wir schreiben als

$$A_N(x_2, x_1) = \sum_{k=0}^{N-1} h f(x_1 + kh).$$

Um mit dieser Näherung die Fläche unter der Kurve möglichst präzise zu beschreiben, lassen wir $N \to \infty$ und damit simultan $h \to 0$ gehen. Wir schreiben dies als

$$A(x_2, x_1) = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=0}^{N-1} h f(x_1 + kh).$$

Dies ist eine Funktion von x_2 und wir interessieren uns für die Ableitung bezüglich auf diese Variable. Wir nähern diese zunächst durch den Differenzenkoeffizienten

$$\frac{dA}{dx_2} = \lim_{\mathrm{N} \to \infty} \frac{A_N(x_2, x_1) - A_{N-1}(x_2 - h, x_1)}{h} = f(x_2).$$

Hier haben wir angenommen, dass es auf die Reihenfolge der Grenzwerte nicht ankommt - in den Mathematikvorlesungen wird dies sehr viel präziser behandelt. Wir sehen aber, dass $A(x_2, x_1)$ eine Stammfunktion von $f(x_2)$ ist mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass $A(x_1, x_1) = 0$ sein muss. Wir schreiben dies als *bestimmtes Integral*

$$A(x_2, x_1) = \int_{x_1}^{x_2} dx\ f(x) = F(x_2) - F(x_1) \equiv F(x)|_{x_1}^{x_2}$$

wobei F eine beliebige Stammfunktion von f ist.

Wir hatten für dieses Argument eine Reihe von Annahmen, die wir am Ende nicht mehr brauchen: Wir sind davon ausgegangen, dass $f(x) \geq 0$ ist. Wenn wir dies nicht mehr annehmen und die Definition des bestimmten Integrals weiter hinschreiben bedeutet das, dass diese Teile negativ zur Fläche beitragen - man spricht von der *orientierten Fläche.* Es muss auch nicht unbedingt $x_2 \geq x_1$ sein, denn wir können und leicht überzeugen dass

$$\int_{x_1}^{x_2} dx\ f(x) = F(x_2) - F(x_1) = -(F(x_1) - F(x_2)) = -\int_{x_2}^{x_1} dx\ f(x).$$

Wir überzeugen uns hiervon durch die Berechnung der Fläche unter einer Geraden. Es ist

$$A = \int_{x_1}^{x_2} dx\ (ax+b) = \left. \frac{a}{2}x^2 + bx \right|_{x_1}^{x_2} = \frac{a}{2}\left(x_2^2 - x_1^2\right) + b(x_2 - x_1).$$

Dies können wir leicht geometrisch interpretieren (Vorlesung) . Dazu ist es hilfreich, das Ergebnis mit dem dritten Binom als $A = \frac{a}{2}(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) + b(x_2 - x_1) = (x_2 - x_1)\left[a\frac{x_1+x_2}{2} + b\right]$ zu schreiben.

2.7 Berechnung von Integralen

Die Integration hat eine Reihe Eigenschaften, die von denen der Differentiation abgeleitet werden können, und die wertvolle Hilfe bei der Berechnung von Integralen liefern. Diese Regeln sind einfach hingeschrieben, es ist aber unerlässlich, Beispiele zu bearbeiten um Erfahrung in ihrer Anwendung zu gewinnen.

2.7.1 Linearität

Wenn F und G Stammfunktionen von f und g sind, dann ist $\lambda F + \mu G$ eine Stammfunktion von $\lambda f + \mu g$. Dies kann man mittels Linearität der Ableitung zeigen.

Damit können wir aus der schon oben beschriebenen Stammfunktion von Monomen auch die von Polynomen konstruieren, sowie die Stammfunktion von Rationalen Funktionen durch Parzialbruchzerlegung.

2.7.2 Substitution

Jetzt betrachten wir das Gegenstück zur Kettenregel. Klarerweise ist, wenn Feine Stammfunktion von f ist

$$\int dx\ f(g(x))g'(x) = F(g(x)).$$

Wir schreiben das auch gerne als

$$\int_{x_1}^{x_2} dx\ \frac{dg}{dx} f(g(x)) = \int_{g(x_1)}^{g(x_2)} dg\ f(g) = \left. F(g) \right|_{g(x_1)}^{g(x_2)}.$$

Im Einfachsten Fall ist $g(x) = ax + b$.Dann liefert dies

$$\int_{x_1}^{x_2} dx\ f(ax+b) = \frac{1}{a}\left(F(ax_2+b) - F(ax_1+b)\right).$$

Wir schauen jetzt einige Beispiele an. Als erstes betrachten wir (für $0 \leq x_1, x_2 \leq \pi$

$$\int_{x_1}^{x_2} dx\ \sin^n x \cos x = \left\{ \begin{array}{c} g = \sin x \\ dg = \cos x dx \end{array} \right\} \int_{\sin x_1}^{\sin x_2} dg\ g^n = \left.\frac{\sin^{n+1} x}{n+1}\right|_{x_1}^{x_2}.$$

Ein spannendes Integral ist

$$J_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad |x_1|, |x_2| \leq 1.$$

Hier benötigen wir eine Substitution, die den Nenner wegzaubert und deren innere Ableitung keine neuen Probleme verursacht. Wir erinnern uns an den Satz von Pythagoras und setzen $x = \sin g$, also $dx = \cos g dg$. Beachten Sie, dass wir die Substitutionsregel über die Umkehrfunktion der üblichen Regel aufgeschrieben haben. Wir finden

$$J_1 = \int_{\arcsin x_1}^{\arcsin x_2} \frac{\cos g}{\cos g} dg = \arcsin x_2 - \arcsin x_1.$$

Analog integrieren wir

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \left\{ \begin{array}{c} x = \sinh g \\ dx = \cosh g dg \end{array} \right\} = \mathrm{Arsinh} x|_{x_1}^{x_2}$$

Eine ganz ähnliche Methode können wir auch auf folgendes Integral anwenden

$$J_2 = \int^{x_2} \frac{dx}{1+x^2} = \left\{ \begin{array}{c} x = \tan s \\ dx = (1+x^2) ds \end{array} \right\} \int^{\arctan x_2} ds = \arctan x_2.$$

Allerdings kommt nur Chuck Norris spontan auf diese Substiution. Wir können hier anders vorgehen, nämlich mit Parzialbruchzerlegung

$$J_2 = \frac{1}{2} \int dx\ \left(\frac{1}{1+ix} + \frac{1}{1-ix} \right) = \frac{i}{2} \ln \frac{1-ix}{1+ix}.$$

Man kann sich davon überzeugen, dass dies das gleiche Ergebnis ist.

2.7.3 Parzielle Integration

Dies ist die Umkehrung der Produktregel. Diese sagt uns dass

$$\int_{x_1}^{x_2} dx\ (f(x)g'(x) + f'(x)g(x)) = f(x)g(x)|_{x_1}^{x_2}$$

ist. Dies schreiben wir als

$$\int dx\ fg' = fg - \int dx\ f'g.$$

Bei der Anwendung dieser Methode gilt es also, den Integranden so aufzuteilen, dass einer der Faktoren sich durch Differenziation möglichst vereinfacht (f) und der andere sich nicht zu sehr verkompliziert (g) . Hier einige Beispiele. Im ersten ist das sehr klar

$$\int dx \text{ xsinx} = -x\cos x + \int dx\ \cos x = \sin x - x\cos x$$

Als zweites schauen wir uns eines mit einer weiteren Umformung an

$$\begin{aligned}\int dx\ \sin^2 x &= -\sin x\cos x + \int dx\ \cos^2 x \\ &= -\text{sinxcosx}+\int \text{dx}\ \left(1-\sin^2 x\right) \\ &= x - \sin x\cos x - \int dx\ \sin^2 x\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\int dx\ \sin^2 x = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin x\cos x.$$

Ein wichtiger Spezialfall ist, wenn wir über eine ganze Zahl von Halbperioden integrieren, wenn wir also mit $z \in \mathbb{Z}$ schreiben können

$$\int_a^{a+z\pi} dx\ \sin^2 x = \frac{\pi}{2}z.$$

Dies kann man auch unabhängig zeigen: Beim Integral über eine ganze Zahl von Halbperioden ist

$$\int_a^{a+z\pi} dx\ \sin^2 x = \int_a^{a+z\pi} dx\ \cos^2 x.$$

Außerdem ist die Summe der rechten und der linken Seite gleich $z\pi$.

Als dritten Beispiel behaupten wir $\forall n \in \mathbb{N}_0$

$$n! = \int_0^\infty dx\ x^n e^{-x}.$$

Dies wollen wir per vollständiger Induktion beweisen. Es ist

$$\int_0^\infty dx\ x^0 e^{-x} = -\ e^{-x}\Big|_0^\infty = 1 = 0!.$$

Als Induktionshypothese setzen wir, dass unsere Gleichung für ein gegebenes n gilt. Dann ist nach einer parzielen Integration

$$\int_0^\infty dx\ x^{n+1}e^{-x} = -\ e^{-x}x^{n+1}\Big|_0^\infty + (n+1)\int_0^\infty dx\ x^n e^{-x} = (n+1)n! = (n+1)!.$$

Schließlich betrachten wir

$$\int dx \ \ln x = \int dx \ 1 \ln x = x \ln x - \int dx \ 1 = x\,(\ln x - 1)\,.$$

2.7.4 Uneigentliche Integrale

Unsere Integraldefinition kann etwas ausgedehnt werden. Einerseits können wir (wie wir es schon gemacht haben) die Integrationsgrenzen im Sinne eines Grenzübergangs gegen unendlich laufen lassen

$$\int_a^\infty dx \ f(x) = \lim_{b\to\infty} \int_a^b dx \ f(x).$$

Andererseits können wir Funktionen anschauen, deren Integrand eine Singularität hat. Exemplarisch betrachten wir für $s > 0$das Integral

$$J_s(b) = \int_0^b \frac{dx}{x^s} = -\left.\frac{x^{1-s}}{s-1}\right|_0^b = \lim_{\epsilon\to 0^+} -\left.\frac{x^{1-s}}{s-1}\right|_\epsilon^b \qquad s \neq 1,\, b > 0$$

konvergiert, wenn $s < 1$ist und hat dann den Wert $J_s(b) = b^{1-s}/(1-s)$. Für $s = 1$ ist die Stammfunktion ein Logarithmus und das uneigentliche Integral kovergiert nicht.

Kapitel 3

Lineare Algebra und analytische Geometrie

3.1 Lineare Gleichungssysteme

Wir betrachten Systeme von$m$ linearen Gleichungen in n Variablen $x_1, \ldots, x_n$ in der Form

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots + \vdots + \ddots + \vdots &= \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_n
\end{aligned}$$

Wir betrachten zunächst eine hemdsärmelige Methode, dieses zu lösen, dann eine deutlich systematischere. Diese Methoden schreiben wir abstrakt hin, wir werden Beispiele dann anhand geometrischer Aufgabenstellungen anschauen.

3.1.1 Sukzessives Auflösen

Hierzu nehmen wir an, dass wir die Gleichungen so sortiert haben, dass $a_{11} \neq 0$. Dann finden wir

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \sum_{i=2}^{n} \frac{a_{1i}}{a_{11}} x_i.$$

Dies setzen wir in die verbliebenen Gleichungen ein und erhalten ein Gleichungssystem von $m-1$ Gleichungen mit $n-1$ Variablen. Den Vorgang wiederholen wir, bis uns entweder die Gleichungen oder die Variablen ausgehen. Am Ende setzen wir die so gewonnenen Ergebnisse wieder rückwärts ein, um das Gesamtergebnis zu erhalten.

Wenn wir nach dem Auflösen weniger Gleichungen als Variable haben, dann können die verbleibenden Variablen frei gewählt werden - es ensteht ein Lösungsraum. Wenn wir mehr Gleichungen als Variable haben, dann haben wir i.A. unauflösbare Gleichungen produziert und es gibt keine Lösung.

3.1.2 Gauß-Algorithmus

Der Begriff des Algorithmus wurde ursprünglich für eine formalisierte Rechenmethode eingeführt. Heute denkt man vor allen Dingen an die Rechenmethoden, die auf Computern durchgeführt werden. Der Gauß-Algorithmus ist eine systematische Methode zur Lösung von linearen Gleichungssystemen. Er basiert auf der Erkenntnis, dass folgende Schritte Äquivalenzumformungen sind, also die Lösungsmenge nicht ändern:

- Vertauschen von Gleichungen
- Multiplikation von Gleichungen mit Zahlen $\neq 0$
- Addition einer Gleichung auf eine andere Gleichung

Zur Darstellung des Gauß-Algorithmus schreiben wir nur die Koeffizienten des linearen Gleichungssystems hin. Er besteht aus folgenden Schritten

1. Zeilentausch: Wir schreiben das LGS hin als

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}$$

   Sollte $a_{11} = 0$ sein tauschen wir die Zeilen so, dass das nicht mehr passiert. Sollten alle Einträge in der ersten Spalte verschwinden, dann ist x_1 unbestimmt und wir rechnen mit einem kleineren LGS weiter.

2. Normieren: Wir dividieren die erste Zeile durch a_{11} und erhalten

$$\begin{array}{ccccc} 1 & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}$$

   mit $a_{1i}^{(1)} = a_{1i}/a_{11}$und $b_1^{(1)} = b_1/a_{11}$.

3. Ausräumen: Wir gehen durch die Zeilen durch und bringen die Einträe der ersten Zeile auf null, indem wir von den Zeilen $j = 2 \ldots m$ jeweils

$a_{j1} \times$ erste Zeile subtrahieren. Wir erhalten so

$$\begin{array}{ccccc} 1 & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{m2}^{(1)} & \cdots & a_{mn}^{(1)} & b_m^{(1)} \end{array}$$

mit $a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{ij}a_{1j}^{(1)}$, $i = 2 \ldots n$, $j = 2 \ldots m$.

4. Wiederholen: Wir wiederholen die Schritte 1-3, wobei wir beim Ausräumen auch immer „nach oben“ ausräumen, bis und Zeilen oder Spalten ausgehen

5. Auflösen: am Ende können wir wieder Fälle unterscheiden.

   (a) Diagonales Zahlenschema

   $$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_1^{(m)} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_2^{(m)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_m^{(m)} \end{array}$$

   Jetzt gehen wir wieder zurück auf die Ausgangsbedeutung des Schemas: Dies bedeutet nichts anderes als $x_i = b_i^{(m)}$ - wir haben das LGS gelöst und die Lösung ist eindeutig.

   (b) Unbearbeitete Spalten - dies passiert wenn $n > m$ oder wenn beim Auflösen eine Zeile ganz zur null wird (zur Bedeutung später). Im Fall einer einzigen unbearbeiteten Spalte, also $n = m + 1$ steht da

   $$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \cdots & a_{1n}^{(m)} & b_1^{(m)} \\ 0 & 1 & \cdots & a_{2n}^{(m)} & b_2^{(m)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mn}^{(m)} & b_m^{(m)} \end{array}$$

   Der Gauß-Algorithmus sagt jetzt, wir sollen eine Zeile ergänzen, die in der fraglichen Spalte -1 stehen hat. Eine Lösung ist dann $x_i = b_i^{(m)}, \ i = 1 \ldots m, \ x_n = 0$. Dazu kommen noch weitere Lösungen, bei denen wir einen reellen Parameter λ mal die letzte Spalte dazuaddieren. Damit hat die komplette Lösungsmenge die Form

   $$\begin{aligned} x_i &= b_i^{(m)} + \lambda a_{1n}^{(m)}, \ i = 1 \ldots m \\ x_n &= -\lambda \quad \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

   Wir können dieses Ergebnis überprüfen, indem wir das vereinfachte Zahlenschema wieder als LGS schreiben

   $$x_i + a_{in}^{(m)} x_n = b_i^{(m)},$$

   und leicht sehen, dass wir das tatsächlich gelöst haben.

(c) Unbearbeitete Spalten - dies passiert, wenn $n < m$ und wenn nicht genügend Zeilen beim Auflösen null werden. Wir haben am Ende

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_1^{(n)} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & 1 & b_{m-1}^{(n)} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_m^{(n)} \end{array}$$

und können die beiden letzten Zeilen nicht mehr ausräumen, d.h. $b_m^{(n)} \neq b_{m-1}^{(n)}$. Damit hat das LGS keine Lösung.

Ausgerüstet mit dieser Technik diskutieren wir Elemente der Vektorrechnung und der analytischen Geometrie.

3.2 Grundbegriffe der Vektorrechnung

Wir benutzen hier den Vektorbegriff aus der Schule, wie Sie ihn auch in den Anfängervorlesungen der Experimentalphysik brauchen. Im Studium werden Sie einen viel allgemeineren und abstrakteren kennenlernen.

Im dreidimensionalen Raum können wir Pfeile

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z$$

definieren. Die linke Seite dieser Gleichung ist ein Pfeil im Raum. Zur Darstellung auf der rechten Seite müssen wir uns erst überlegen, was unsere Koordinatenachsen eigentlich sind und können so den Einheitsvektoren

$$\hat{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

definieren. Geometrisch bestimmen wir x indem wir das Lot von $\vec{r}$ auf die x-Achse (=die orthogonale Projektion von $\vec{r}$ auf $\hat{e}_x$ fällen.

Wir können jetzt einfache Operationen mit Vektoren durchführen: Die Streckung um den Faktor λ

$$\vec{r} \to \lambda\vec{r} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$$

und die Verkettung zweier Vektoren (Zeichnung in der Vorlesung) zu einem Summenvektor

$$\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} .$$

Die Verkettung beider Operationen nennt man das Bilden einer Linearkombination

$$\lambda\vec{r}_1 + \mu\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu x_2 \\ \lambda y_1 + \mu y_2 \\ \lambda z_1 + \mu z_2 \end{pmatrix}.$$

Ähnliche Ausdrücke haben wir schon bei der Beschreibung der Linearität in der Differenzial- und Integralrechnung gesehen.

Im Anschauungsraum identifizieren wir oft Punkte mit ihren Ortsvektoren, also Vektoren vom Koordinatenursprung zum Punkt.

Wenn das Koordinatensystem orthogonal ist können wir die Länge eines Vektors leicht mit Pythagoras berechnen zu

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Manchmal interessiert uns nur die Richtung eines Vektors, also die Version mit Einheitslänge. Diese erhalten wir dann leicht als

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}.$$

3.3 Geraden

Geraden sind eine spezielle Menge von Punkten

$$g = \{\vec{a} + t\vec{v} | t \in \mathbb{R}\}$$

Wir nennen $\vec{a}$ den Aufpunkt und $\vec{v}$ den Reichtungsvektor. Wenn wir zwei Geraden g_1 und g_2 haben können wir uns die Frage stellen, ob sich diese schneiden (und wenn ja, wo). Wir wollen also wissen ob $t_{1/2}$ existieren so, dass

$$\vec{a}_1 + t_1\vec{v}_1 = \vec{a}_2 + t_2\vec{v}_2.$$

Dies können wir umschreiben als LGS

$$\vec{v}_1 t_1 - \vec{v}_2 t_2 = \vec{a}_2 - \vec{a}_1 \equiv \vec{a}.$$

Wir beschränken uns auf Geraden in zwei Dimensionen (später kommt noch ein Kommentar für drei Dimensionen). Das lineare Gleichungssystem entsteht in den Komponenten der Gleichung

$$\begin{aligned} v_{1x}t_1 - v_{2x}t_2 &= a_x \\ v_{1y}t_1 - v_{2y}t_2 &= a_y. \end{aligned}$$

Wir lösen das System mittels Gaußelimination. Wir nehmen als ersten Fall an, dass $v_{1x} \neq 0$ ist und erhalten als Zwischenschritt

$$\begin{array}{ccc} 1 & -\frac{v_{2x}}{v_{1x}} & \frac{a_x}{v_{1x}} \\ v_{1y} & -v_{2y} & a_y \end{array}.$$

Wir räumen die zweite Zeile aus, indem wir die erste mit v_{1y} multiplizieren und von der zweiten subtrahieren

$$\begin{array}{ccc} 1 & -\frac{v_{2x}}{v_{1x}} & \frac{a_1}{v_{1x}} \\ 0 & \frac{1}{v_{1x}}\left(v_{2x}v_{1y}-v_{2y}v_{1x}\right) & \frac{1}{v_{1x}}\left(a_y v_{1x}-a_x v_{1y}\right) \end{array}$$

Wir definiere den $D \equiv v_{2y}v_{1x} - v_{2x}v_{1y}$und schreiben im Fall $D \neq 0$ kompakten

$$\begin{array}{ccc} 1 & -\frac{v_{2x}}{v_{1x}} & \frac{a_1}{v_{1x}} \\ 0 & 1 & \frac{a_x v_{1y}-a_y v_{1x}}{D} \end{array}$$

Damit können wir wiederum nach oben ausräumen. Das obere rechte Element ist

$$\frac{a_x}{v_{1x}} - \frac{v_{2x}}{v_{1x}}\frac{a_x v_{1y} - a_y v_{1x}}{D} = \frac{a_y v_{1x} v_{2x} - a_x\left(v_{2x}v_{1y} - v_{2x}v_{1y} + v_{1x}v_{2y}\right)}{v_{1x}D}$$

Also haben wir als Lösungsformel

$$t_1 = \frac{v_{2x}a_y - v_{2y}a_x}{D} \quad t_2 = \frac{v_{1y}a_x - v_{1x}a_y}{D}.$$

In der Herleitung haben wir zwar angenommen, dass $v_{1x} \neq 0$ ist, aber das Ergebnis gilt auch wenn dies nicht erfüllt ist. Es muss aber $D \neq 0$ sein. Insbesondere exstiert also genau eine Lösung, die Geraden schneiden sich in einem einzigen Punkt.

Jetzt betrachten wir den Fall $D = 0$. Nach der Elimination des linken unteren Elements haben wir dann

$$\begin{array}{ccc} 1 & -\frac{v_{2x}}{v_{1x}} & \frac{a_1}{v_{1x}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{v_{1x}}\left(a_y v_{1x}-a_x v_{1y}\right) \end{array}.$$

Jetzt gibt es zwei Möglichkeiten: Wenn das rechte untere Element $\neq 0$ ist, gibt es keine Lösung, da in der zweiten Reihe eine unlösbare Gleichung steht. Wenn das Element $= 0$ ist, dann fällt die untere Gleichung ganz heraus und wir haben stattdessen einen ganzen Lösungsraum

$$h = \left\{(t_1, t_2)|t_1 = \frac{a_x}{v_{1x}} + t_2\frac{v_{2x}}{v_{1x}}\right\}$$

Wir wollen dieses Ergebnis geometrisch deuten. Wir beginnen mit dem Faktor D. Wenn $D = 0$ ist bedeutet das

$$v_{2y}v_{1x} = v_{2x}v_{1y} \Leftrightarrow \frac{v_{1x}}{v_{1y}} = \frac{v_{2x}}{v_{2y}}$$

(falls die Faktoren im Nenner nicht verschwinden). Dies bedeutet, dass die Richtungsvektoren der beiden Geraden parallel sind. Die obige Bedigung für unendlich viele Lösungen können wir auflösen zu

$$a_y v_{1x} - a_x v_{1y} = 0 \Leftrightarrow \frac{a_x}{a_y} = \frac{v_{1x}}{v_{1y}}$$

Also passiert das, wenn ein Richtungsvektor parallel zum Verbindungsvektor der Aufpunkte ist - wenn also die beiden parallelen Geraden identisch sind.

Die Lösbarkeitstheorie dieses einfachen LGS mit 2 Variablen und 2 Gleichungen entspricht also einer simplen geometrischen Aussage: Zwei Geraden in der Ebene die nicht parellel sind, schneiden sich in genau einem Punkt. Wenn sie parallel sind, schneiden sie sich nicht oder sind identisch.

3.4 Ebenen

Eine Ebene können wir mittels eines Stützpunktes mit Ortsvektor $\vec{a}$ und zwei nicht-parallelen aufspannenden Vektoren $\vec{v}_{1/2}$ beschreiben als

$$E = \left\{ \vec{r} = \vec{a} + t_1 \vec{v}_1 + t_2 \vec{v}_2 | t_{1/2} \in \mathbb{R} \right\}$$

Wir wollen jetzt herausfinden, ob ein Punkt $\vec{b}$ in der Ebene E liegt, d.h. ob wir für $\vec{x} = \vec{b} - \vec{a}$ Zahlen $t_{1/2}$ finden können so, dass

$$\vec{v}_1 t_1 + \vec{v}_2 t_2 = \vec{x}$$

ist. Dies sind also drei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten, d.h. die ist im Allgemeinen nicht auflösen. Wir lösen zunächst nur das kleinere LGS aus den y und z- Komponenten so, wie im vorherigen Abschnitt. Dazu definieren wir $n_x = v_{1y} v_{2z} - v_{1z} v_{2y}$ und haben

$$t_1 = \frac{v_{2z} b_y - v_{2y} b_z}{n_x} \quad t_2 = \frac{v_{1y} b_z - v_{1z} b_y}{n_x}.$$

Jetzt müssen wir überprüfen, ob auch die $x-$ Komponente unserer Ebenengleichung dadurch erfüllt wird. Dazu muss gelten

$$\begin{aligned} n_x x_x &= v_{1x} \left(v_{2z} b_y - v_{2y} b_z \right) + v_{2x} \left(v_{1y} b_z - v_{1z} b_y \right) = -b_y n_y - b_z n_z \\ n_y &= v_{1z} v_{2x} - v_{1x} v_{2z} \quad n_z = v_{1x} v_{2y} - v_{1y} v_{2x} \end{aligned}$$

Um diese Gleichungen interpretieren zu können, benötigen wir zwei wichtige Konzepte der Vektorrechnung.

3.4.1 Skalarprodukt

In ihren Mathematikvorlesungen werden Sie das Konzept des Skalarproduktes als etwas sehr Allgemeines kennenlernen. Hier wiederholen wir den für analytische Geometrie wichtigen Spezialfall der dreidimensionalen Vekotrrechnung.

Gegeben zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nennen wir

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

das Skalarprodukt (ein Produkt aus zwei Vektoren, das einen Skalar liefert). Es ist kommutativ $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ und distributiv $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c} \right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$. Bei der

Diskussion über ein Assoziativgesetz muss man aufpassen, das Skalarprodukt und die Skalarmultiplikation richtig zu behandeln. Man sieht aber leicht dass im Allgemeinen $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c} \neq \vec{a}\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)$ ist (wenn $\vec{a}$ und $\vec{c}$ nicht parallel sind, dann sind es die beiden Seiten dieser Ungleichung auch nicht).

Wie können wir das Ergebnis interpretieren? Wir haben schon oben gesehen, dass $|\vec{r}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$ist, also $\vec{r}\cdot\vec{r} = |\vec{r}|^2$ ist. Betrachten wir jetzt einen Vektor $\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$. Dann ist

$$c^2 = \left(\vec{b} - \vec{a}\right)^2 = b^2 + a^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} = b^2 + a^2 - 2ab\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab}.$$

Mit dem Kosinussatz aus der Schulgeometrie schließen wir daraus mit dem von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossenen Winkel

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\theta.$$

Wir können (Zeichnung in der Vorlesung) dies auch so interpretieren, dass

$$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a}$$

die Länge der Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ist. Insbesondere überprürfen wir für einen Vektor $\vec{r}$ dass $x = \vec{r}\cdot\hat{e}_x$ ist (analog für y und z) .

3.4.2 Vektorprodukt

Das Vektorprodukt (oder Kreuzprodukt) zweier Vektoren ist wieder ein Vektor und es wird geschrieben als

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}.$$

Wir sehen, dass in jeder Komponente rechts nur die anderen Komponenten der Faktoren sind: In der x - Zeile kommen nur die y und $z-$ Komponenten von a und b vor. Außerdem tritt jede Komponente genau einmal positiv und einmal negativ auf. Wir können uns den Ausdruck über das Schema

$$\begin{array}{ccccc} e_x & e_y & e_z & e_x & e_y \\ a_x & a_y & a_z & a_x & a_y \\ b_x & b_y & b_z & b_x & b_y \end{array}$$

merken. Wir nehmen alle Diagonalen, die hineinpassen und zählen sie zusammen, wobei wir Diagonalen von links oben nach rechts unten positiv und alle von links unten nach rechts oben negativ zählen. Wir können leicht überprüfen, dass das Vektorprodukt antikommutativ ist, also

$$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$$

und distributiv

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

aber nicht assoziativ, $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \neq \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c}$ (was wir mit den später gezeigten Relationen sehr einfach zeigen können).

Um dies kompakt hinzuschreiben definieren wir das Levi-Cività-Symbol (oder Epsilon-Symbol) ϵ_{ijk}. Seine Eigenschaften sind vollständig durch die Aussage definiert, dass $\epsilon_{123} = 1$ und die Forderung nach totaler Antisymmetrie unter Indexvertauschung, also

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{kji} = -\epsilon_{ikj}$$

festgelegt. Daraus folgt sofort, dass bei zwei gleichen Indizes das Symbol verschwindet, $\epsilon_{iik} = -\epsilon_{iik} = 0$. Wenn man die Indizes zwei mal verstauscht, hat man eine zyklische Vertauschung durchgeführt. Es ist also

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1 \quad \epsilon_{213} = \epsilon_{132} = \epsilon_{321} = -1$$

und alle anderen Einträge sind $= 0$. Damit ist

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_i = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} a_j b_k.$$

Wir können uns jetzt davon überzeugen, dass das Vektorprodukt senkrecht auf seine Faktoren steht. Dazu berechnen wir

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \sum_i a_i \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_i = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} a_i a_j b_k.$$

Alle drei Summen laufen über $1, 2, 3$. Wir betrachten die Summen über i und j getrennt. Zunächst mal sehen wir, dass wir $i = j$ ausschließen können, da $\epsilon_{iik} = 0$ ist. Damit ist entweder $i < j$ oder $i > j$. Wir schreiben

$$\sum_{i \neq j} \epsilon_{ijk} a_i a_j = \sum_{i<j} \epsilon_{ijk} a_i a_j + \sum_{i>j} \epsilon_{ijk} a_i a_j.$$

Jetzt tauschen wir in der zweiten Summe die Namen der Summationsindizes - das dürfen wir machen, denn es wird ja eh am Ende zusammengezählt. Wir erhalten

$$\sum_{i,j} \epsilon_{ijk} a_i a_j = \sum_{i<j} \left(\epsilon_{ijk} + \epsilon_{jik}\right) a_i a_j = 0$$

Dies verschwindet, da $\epsilon_{jik} = \epsilon_{ijk}$. Somit haben wir $\vec{a} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$ gezeigt - das Vektorprodukt steht senkrecht auf seinen Faktoren.

Jetzt wollen wir seine Länge des Vektorproduktes und noch andere nützliche Formeln berechnen. Dazu berechnen wir eine als wichtige Hilfsformel die Summe über ein Produkt von Levi-Civita-Symbolen $\sum_k \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk}$. Dieser Ausdruck hängt immer noch von den Inidizes $ijlm$ ab. Wir müssen die drei Zahlenwerte

$1, 2, 3$ auf die drei Indizes so verteilen, dass hier etwas nicht-verschwindendes herauskommen kann, wobei die Struktur der Summe vorgibt, dass die hinteren Indizes gleich sind. Insbesondere muss $i\neq$j und $l \neq m$ sein. Dann liefert höchstens ein Term der Summe einen nichtverschwindenen Beitrag, der mit $k \neq i, j$. Damit das klappt muss auch $k \neq l, m$ sein. Da wir nur drei Werte zur Verfügung haben, gibt es nur noch zwei Möglichkeiten die Indizes zu verteilen

- $i = l$ und $j = m$: Dann sind beide Levi-Civita-Symbole gleich und die Summe ist gleich eins
- $i = m$ und $j = l$: Dann sind beide Symbole ungleich und die Summe ist gleich minus eins

Um das Ergebnis kompakt hinzuschreiben benutzen wir das Kroneckersymbol δ_{ij} das die Eigenschaft hat, dass $\delta_{ii} = 1$ ist und sonst $= 0$. Wir haben also die Formel

$$\sum_k \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$

Diese Nebenrechnung erlaubt es uns, die Länge des Vektorproduktes zu berechnen

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2 = \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)^2 = \sum_i \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_i \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_i$$

Wenn wir jetzt die Summe auflösen müssen wir darauf achten, unterschiedliche Summationsindizes in den Faktoren zu verwenden - die Terme werden separat dargestellt. Wir haben also

$$\sum_i \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_i \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_i = \sum_{ijklm} \epsilon_{ijk} a_j b_k \epsilon_{ilm} a_l b_m = \sum_{jklm} a_j a_l b_k b_m \sum_i \epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm}$$

Jetzt kommt unsere Formel in Einsatz und wir schreiben

$$\begin{aligned}\sum_{jklm} a_j a_l b_k b_m \sum_i \epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} &= \sum_{jklm} a_j a_l b_k b_m \left(\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}\right) \\ &= \sum_{jk} \left(a_j a_j b_k b_k - a_j b_j a_k b_k\right) = a^2 b^2 - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2 \\ &= a^2 b^2 \left(1 - \cos^2\alpha\right) = a^2 b^2 \sin^2\alpha\end{aligned}$$

wobei αder Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist. Damit haben wir Richtung und Länge des Vektorproduktes bestimmt. Wir können uns leicht davon überzeugen, dass die Orientierung so ist, wie die drei ersten Finger der rechten Hand.

Diese Formel hat weiter reichende Konsequenzen: Die Länge von $\vec{a}\times\vec{b}$ ist die Länge des von diesen beiden Vektoren gebildeten Parallelogramms (geometrisches Argument, Zeichnung in der Vorlesung). Wenn wir jetzt die Komponente eines dritten Vektors $\vec{c}$ die senkrecht darauf steht nehmen, dann erhalten wir das Volumen des von diesen drei Vektoren aufgespannten Körpers. Das wird also bewerkstelligt durch das Spatprodukt

$$\left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \cdot \vec{a} = V_{abc}.$$

Wir können uns leicht mit dem Levi-Civita Symbol davon überzeugen, dass wir hier die Vektoren zyklisch vertauschen können

$$\left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$$

Eine weitere nützliche Identität basierend auf dieser Rechnung ist das dreifache Vektorprodukt

$$\begin{aligned}\left[\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)\right]_i &= \sum_{jk} \epsilon_{ijk} a_j \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)_k = \sum_{jklm} \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} a_j b_l c_m \\ &= \sum_{jlm} a_j b_l c_m \sum_k \epsilon_{kij}\epsilon_{klm} \\ &= \sum_j (a_j b_i c_j - a_j b_j c_i) = \left((\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)\vec{c}\right)_i\end{aligned}$$

3.4.3 Zurück zur Ebene

Wir können jetzt das Ende unserer Diskussion der Ebenengleichung finden. Wir hatten einen Vektor $\vec{n}$ während der Rechnung definiert mit

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} v_{1y}v_{2z} - v_{1z}v_{1y} \\ v_{1z}v_{2x} - v_{1x}v_{2z} \\ v_{1x}v_{2y} - v_{1y}v_{2x} \end{pmatrix} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$$

Damit sehen wir, dass dies ein Normalenvektor auf unserer Ebene ist. Die Testgleichung, ob der Punkt auf der Ebene ist, ist damit $\vec{b} \cdot \vec{n} = 0$. Sie bedeutet also, dass der Vektor vom Aufpunkt der Ebene hin zum Testpunkt senkrecht auf dem Normalenvektor stehen muss - und das macht Sinn.

3.5 Lineare Unabhängigkeit, Basis, Dimension, Lösbarkeit

Wir haben schon gesehen, dass das Zählen linearer Gleichungen uns eine Idee davon gibt, ob diese lösbar sind und ob die Lösung eindeutig ist. Das war aber nicht endgültig, während des Auflösens kann es immer passieren, dass etwas schiefgeht, dass Gleichungen herausfallen oder Widersprüche produzieren. Wir wollen diese Aussagen systematisieren.

Wir nennen eine Menge von Vektoren

$$M = \{\vec{v}_i,\ i = 1 \dots n\}$$

linear unabhängig, wenn es nicht möglich ist, den Nullvektor als Linearkombination zu schreiben, d.h. wenn es keine Menge von $\lambda_i \not\equiv 0$ gibt so, dass

$$\sum_i \lambda_i \vec{v}_i = \vec{0}$$

ist. Äquivalent nennen wir die Menge linear unabhängig, wenn es nicht möglich ist, eines seiner Elemente als Linearkombination der anderen zu schreiben. Wir können uns davon leicht überzeugen: Wenn die obige Gleichung gilt dann muss mindestens ein λ_j sein. Dann schreiben wir

$$\vec{v}_j = -\sum_{i\neq j} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \vec{v}_i.$$

Gegeben eine solche Menge M definieren wir

$$V = \left\{ \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i | \lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1 \dots n \right\}$$

als den von M aufgespannten Vektorraum. Wir sehen, dass eine Ebene durch den Ursprung ein von zwei Vektoren aufgespannter Vektorraum ist. Der Raum aller Vektoren

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

hat die Dimension 3, wird z.B. von $\{\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z\}$ aufgespannt und heißt $\mathbb{R}^3$.

Wenn jetzt die Menge M auch noch linear unabhängig ist, dann können wir keinen Vektor mehr wegnehmen ohne V zu verändern. In dem Fall nennen wir M eine Basis von V und n die Dimension von V. Wir können uns leicht davon überzeugen, dass dann die Darstellung eines $\vec{v} \in V$ durch die Koeffizienten λ_i eindeutig ist. Wir wenden hier das Mittel des Widerspruchsbeweises an: Nehmen wir an, dass zwei unterschiedliche Sätze Koeffizienten $\{\lambda_i\}$ und $\{\eta_i\}$ existieren so, dass

$$\sum_i \lambda_i \vec{v}_i = \sum_i \eta_i \vec{v}_i$$

ist. Damit ist

$$\sum_i (\lambda_i - \eta_i) \vec{v}_i = \vec{0}$$

und weil die Mengen unterschiedlich sind ist mindestens einer der Koeffizienten auf der linken Seite von Null verschieden. Damit wäre dann M nicht mehr linear unabhängig.

Was hat dies mit der Lösbarkeit linearer Gleichungssyteme zu tun? Stellen wir uns vor, wir haben einen Vektorraum der Dimension d in dem wir eine Menge aus d Vektoren haben. Dann ist die Untersuchung auf lineare Unabhängigkeit das Lösen eines homogenen linearen Gleichungssytems (einem mit Nullen auf der rechten Seite) mit d Gleichungen in d Unbekannten. Dieses können wir als Zahlenschema im Gaußalgorithmus schreiben, indem wir einfach die Vektoren $\vec{v}_i$ nebeneindander schreiben. Wenn wir dies vollständig ausräumen können, es also nur eine einzige Lösung gibt, dann muss diese $\lambda_i \equiv 0$ sein und die Vektoren sind linear unabhängig. Wenn es mehrere Lösungen gibt, dann waren die Vektoren linear abhängig. Bei weniger als d Vektoren haben wir mehr Gleichungen als Unbekannte, aber das kann auch passieren. Bei mehr als d Vektoren haben wir weniger Gleichungen als Unbekannte und es ist nicht möglich, dass es mehr Lösungen gibt, also dass diese linear unabhängig sind - denn d ist ja die größte linear unabhängige Menge in unserem Vektorraum.