Theoretische Physik III

SS 2013 | **18.04.2013**
Blatt I | **Fl̈ligkeitsdatum: 25.04.2013**

Prof. Dr. Wilhelm-Mauch | http://qsolid.uni-saarland.de/?Lehre

Übung 1 *Fourier-Transformation*

a) Berechne das Integral
$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2+ikx}.$$
(1 Punkt)

b) Die Fourier Transformation $\tilde{\phi}(\omega)$ von der Funktion $\phi(t)$ ist definiert als
$$\tilde{\phi}(\omega) \equiv \mathcal{F}[\phi(t)] \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \phi(t)$$
und die Inverse Fourier-Transformation $\tilde{\tilde{\phi}}(t)$ von der Funktion $\tilde{\phi}(\omega)$ ist
$$\tilde{\tilde{\phi}}(t) \equiv \mathcal{F}^{-1}[\tilde{\phi}(\omega)] \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \tilde{\phi}(\omega).$$
Zeige, dass die Fouriermoden vollständing sind sind. Dies bedeutet $\phi(t)$ als
$$\phi(t) = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{\phi}(\omega)],$$
mit den Faktoren $\tilde{\phi}(\omega) = \mathcal{F}[\phi(t)]$ entwickelt werden kann. Das ist äquivalent zu $\tilde{\tilde{\phi}}(t) = \phi(t)$ — dies kann nicht als gegeben angenommen werden sondern muss ebenfalls gezeigt werden.
Hinweis: Nutze a) um zu zeigen dass, $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} = \delta(t)$ was Sie nicht als gegeben annehmen sollten. *(1 Punkt)*

c) Beweise den Satz von Parseval
$$\int_{-\infty}^{\infty} dt |\phi(t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |\tilde{\phi}(\omega)|^2.$$
Dies zeigt, dass die Energie der über die Zeit summierten Wellenform $\phi(t)$ gleich der Energie der über die Frequenz summierten Fourierkomponenten ist. *(1 Punkt)*

d) Zeige, dass
$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[\partial_\omega \tilde{\phi}(\omega)] &= it\phi(t), \\ \mathcal{F}[\partial_t \phi(t)] &= -i\omega\phi(\omega). \end{aligned}$$
(1 Punkt)

Übung 2 *Dirac Delta Funktion*

Die übliche Aussage

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases} \tag{1}$$

ist keine ausreichende definition einer integrierbaren Funktion. Um zu Integrale mit einer Dirac-Delta Funtion berechnen, man benutzt ein Funktionenfolge, die die Filtereigenschaft des Dirac-Delta annhert.

a) Zeige, dass diese Funktionenfolge von stark gepeakten Funktionen die definierende Eigenschaft der Dirac-Deltafunktion annähert

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x) f(x) = f(0) \tag{2}$$

Hinweis: Benutze die Integralform des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung.

- $\varphi_n(x) = \begin{cases} 0 & |x| \geq \frac{1}{n} \\ \frac{n}{2} & |x| < \frac{1}{n} \end{cases}$ *(1 Punkt)*
- $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2}$ *(1 Punkt)*

b) Zeigen Sie, dass $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$ *(1 Punkt)*

c) Mit der Funktionenfolge $\phi_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2}$, $n = 1, 2, 3, ...$ zeige, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\delta(x)}{\mathrm{d}x} f(x)\,\mathrm{d}x = -\left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}. \tag{3}$$

(2 Punkt)

Übung 3 *Diagonalisierung von Matrizen*

Finde die Eigenwerte und Eigenvektoren folgender Matrizen. Gib diese in der Form einer entsprechenden Diagonalmatrix und einer Basiswechselmatrix an.

a) $\begin{pmatrix} \frac{\hbar\omega}{2} & \hbar\Omega \\ \hbar\Omega & \frac{\hbar\omega}{2} \end{pmatrix}$ *(1 Punkt)*

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *(1 Punkt)*

c) $$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ *(1 Punkt)*

Übung 4 *Freies Teilchen*

a) Berechne die freie Zeitentwicklung $\left(H = \frac{-\hbar^2 \partial_x^2}{2m}\right)$ des Gauß-Wellenpakets, mit dem Anfangszustand

$$\psi(x, 0) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}}.$$

Hinweis: Versuche es mit der Lösung

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \phi(k) e^{ikx} e^{-iEt/\hbar}.$$

und bestimme zunächst das geeginete $\phi(k)$ *(2 Punkte)*

b) Berechne den Erwartungswert der Lage des Teilchen $\langle x \rangle$ als Funktion der Zeit und die Unsicherheiten $\Delta x \equiv \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$ und $\Delta p \equiv \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}$.

Kann man den Wert von $\Delta x \Delta p$ des Anfangszustandes verringern? *(2 Punkte)*