Notizen zur Vorlesung über Saitenschwingungen

Frank K. Wilhelm-Mauch

July 21, 2015

1 Ausgangspunkt

Bisher haben wir immer Massenpunkte bzw. starr gekoppelte Massenpunkte behandelt. Jetzt erlauben wir harmonische Bewegung der Massenpunkte und führen einen Kontinuumslimes durch, der uns in die Welt von Wellen- und Biegephänomenen und Flüssigkeiten bringt. Technisch bringt uns das zum Lagrangeformalismus für Felder, den wir aus dem für Massenpunkten heraus entwickeln.

2 Aufgabenstellung

Wir betrachten eine eingespannte Saite deren Ruhelage die x Achse ist. Sie wird senkrecht zur x Achse um $u(x,t)$ ausgelenkt. Wir wollen die Bewegungsgleichung für $u(x,t)$ aufstellen. $u(x,t)$ ist ein einfaches Beispiel für ein Feld - eine Größe die an einem raumzeitlichen Kontiuum angeshrieben wird.

Wir denken uns die Saite in N Elemente der Länge $\Delta x = L/N$ aufgeteilt. Am Ende werden wir $N \rightarrow \infty$gehen lassen, das heißt, wir werden den Kontinuumslimes bilden. Wir nehmen an, dass die Saite eine Massendichte von ρhat, jeder Abschnitt also die Masse $\Delta m = \rho \Delta x$ hat. Jeder Massenpunkt bewegt sich mit Geschwindigkeit du_i/dt und wir finden so für die gesamte kinetische Energie

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{\rho L}{2N} \left(\frac{du_i}{dt} \right)^2 .$$

Für die potenzielle Energie notieren wir, dass die Saite auf beiden Seiten, bei $x = 0$ und $x = L$ auf $u = 0$ eingespannt ist. Die Saite soll eine elastische Kraft haben, die wir als linear nähern, d.h. sie ist proportional zum Abstand Δs_i zweier benachbarter Massenpunkte. Dieser ist nach Pythagoras

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (u_{i+1} - u_i)^2} \simeq \Delta x + \frac{1}{2} \frac{(u_{i+1} - u_i)^2}{\Delta x} + \dots$$

wobei wir im letzten Schritt kleine Auslenkungen angenommen und so die Entwicklung in eine binomische Reihe in der niedrigsten Ordnung abgebrochen haben. Wir gehen davon aus, dass die Saite mit der Kraft P bei der Länge Δx vorgespannt ist, d.h. eine Längenänderung liefert die Energie $P\left(\Delta s-\Delta x\right)$. Das ergibt als potenzielle Energie

$$U=P\sum_{i}^{N-1}\Delta x\frac{\left(u_{i+1}-u_{i}\right)^{2}}{2\Delta x^{2}}.$$

Jetzt führen wir den Kontinuumslimes durch, d.h. wir lassen $N\rightarrow\infty$gehen. Dabei haben wir ja schon alles in längenbezogenen Einheiten angegeben, d.h. die Gesamtlänge der Saite bleibt konstant. Für die kinetische Energie haben wir eine Summendarstellung eines Integrals

$$T=\lim_{N\rightarrow\infty}\frac{\rho}{2}\sum_{i=1}^{N}\Delta x\left(\frac{du_{i}}{dt}\right)^{2}=\frac{\rho}{2}\int_{0}^{L}dx\;\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)^{2}.$$

In der potenziellen Energie erkennen wir die Annäherung an die Ortsableitung

$$\lim_{\Delta x\rightarrow0}\frac{u_{i+1}-u_{i}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\rightarrow0}\frac{u(x+\Delta x,t)-u(x,t)}{\Delta x}=\frac{\partial u(x,t)}{\partial\mathrm{t}}$$

und finden damit

$$U=\lim_{N\rightarrow\infty}P\sum_{i=1}^{N-1}\Delta x\frac{\left(u_{i+1}-u_{i}\right)^{2}}{2\Delta x^{2}}=\frac{P}{2}\int dx\;\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^{2}.$$

Damit ist die gesamte Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}\left(u,\dot{u}\right)=\int_{0}^{L}dx\;\left[\frac{\rho}{2}\dot{u}^{2}(x,t)-\frac{P}{2}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^{2}\right]=\int_{0}^{L}dx\;L(u(x,t),\dot{u}(x,t),u'(x,t))$$

was die Lagrangedichte L definiert sowie die Ortsableitung$u'=du/dx$.

2.1 Bewegungsgleichung

Auch hier gilt das Hamiltonsche Prinzip. Startend von der Summendarstellung könnten wir jetzt die normalen Euler-Lagrange-Gleichungen anwenden und dann am Ende wieder den Kontinuumslimes bilden. Hier schlagen wir einen anderen, eleganteren und instruktiveren Weg ein. Wir erkennen, dass die Wirkung

$$S=\int_{t_{1}}^{t_{2}}dt\;\int_{0}^{L}dx\;L\left(u,\dot{u},u',x,t\right)$$

eine analoge Form zum Fall der Mechanik hat, aber jetzt zwei Integrationsvariablen t und $x$heißt. Die Randbedingungen sind auch wieder in beiden Fällen festgehalten und es tauchen die Ortsableitung u' und die Zeitableitung $\dot{u}$ auf. Wir können jetzt genau so vorgehen wie bei der Herleitung der gewöhnlichen

Euler-Lagrange-Gleichungen aber jetzt mit geschatelten Integralen, die wir in jeder Schicht parziell integrieren. Wir erhalten die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}}\right)+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial u'}\right)=\frac{\partial L}{\partial \mathrm{u}}.$$

Hier ist u zyklisch und

$$L=\frac{\rho}{2}\dot{u}^2-\frac{P}{2}u'^2$$

und damit wird die Euler-Lagrage-Gleichung zur Wellengleichung

$$\Box u=u''-\frac{1}{c_s^2}\ddot{u}=0$$

wobei wir die Schallgeschwindigkeit $c_s=\sqrt{\frac{P}{\rho}}$ definiert haben. Der Operator $\Box=\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ heißt D'Alembert-Operator oder Quabla.

Wir könnten allgemeiner noch eine äußere Kraft dazuschreiben um die Erzeugung von Wellen zu beschreiben - das passiert in der Elektrodynamik dann sehr ausführlich. Hier interessieren wir uns für Lösungen der freien Wellengleichung.

3 Lösungen der freien Wellengleichung

Wir inteeressieren uns jetzt für die Lösungen dieser Gleichung, die sich als stehende Wellen herausstellen werden. Da der D'Alembert-Operator ein linearer Differentialoperator ist, sind Linearkombinationen von zwei Lösungen $u_{1/2}$ mit $\Box u_{1/2}=0$ ist wieder eine Lösumg

$$\Box\left(\lambda_1 u_1\left(x,t\right)+\lambda_2 u_2(x,t)\right)=\lambda_1\Box u_1\left(x,t\right)+\lambda_2\Box u_2\left(x,t\right)=0.$$

Um eine vollständige Basis von Lösungen zu erhalten, wählen wir einen Separationsansatz $u\left(x,t\right)=v(x)w\left(t\right)$ und setzen in die Wellengleichung ein

$$0=\Box v(x)w(t)=w(t)v''(x)-\frac{v(x)}{c_s^2}\ddot{w}(t)=u(x,t)\left[\frac{v''(x)}{v(x)}-\frac{1}{c_s^2}\frac{\ddot{w}(t)}{w(t)}\right].$$

Wir dividieren diesen Ausdruck durch u. Damit muss die eckige Klammer für alle Werte von x und t identisch verschwinden. Da der erste Term nur von x und der zweite nur von t abhängt, müssen diese Terme die gleiche Konstante ergeben. Für den zeitbhängigen Teil erhalten wir so

$$\ddot{w}=Aw$$

mit einer Konstanten A.Wäre A negativ, so wären die Lösungen ansteigende und abfallende Exponenzialfunktionen. Diese wären unphysikalisch und wir nehmen darum A als nichtnegativ, was uns erlaubt $A=\omega^2$ zu schreiben. Damit haben wir die Bewegungsgleichung des freien harmonischen Oszillators mit Lösung $w(t)=B\sin\left(\omega t+\phi\right)$ vor uns. Analoges gilt für v und wir finden

$v(x) = D\sin(kx+\psi)$. Da wir als Randbedingung $u(0,t) = u(L,t) = 0$ gefordert haben ist $\psi = 0$ und $k = k_n = n\pi/L$ mit einer natürlichen Zahl n. Damit setzen wir in die Eckige Klammer in der Wellengleichung ein und finden

$$\frac{v''}{v} - \frac{1}{c_s^2}\frac{\ddot{w}}{w} = k^2 - \frac{\omega^2}{c_s^2} = 0$$

damit erhalten wir die *Dispersionsrelation* $\omega(k) = \pm c_s k$. Dies nennen wir auch lineare Dispersion. Analog zur Darstellung des Dirac-Deltas als Integral über komplexe Exponenzialfunktionen kann man zeigen, dass sich aus Linearkombinationen dieser Lösungen alle Lösungen dieses Systems konstruieren lassen - da die Funktionen nur auf einem Ortsintervall $0 \leq x \leq L$ definiert sind erhält man Fourierreihen statt -integrale.

Die Wellen, die wir hier als Lösungen bekommen, heißen *stehende Wellen* da sich ihre Wellenfront nicht bewegt - das liegt an den vorgegebenen Randbedingungen der eingespannten Saite. Im Allgemeinen sind auch propagierende Ebene Wellen u=Re $\left[ze^{i(kx-\omega t)}\right]$ zugelassen. Dazu auch mehr in der Elektrodynamik.

Aus der Diskretheit der erlaubten Werte der *Wellenzahl* k ergeben sich auch diskrete Frequenzen $\omega_n = nc_s\pi/L$.