Notizen zur Vorlesung über die Hamilton-Jacobi-Gleichung

Frank K. Wilhelm-Mauch

23.6.15

1 Ausgangspunkt

In der vorangegangenen Vorlesung haben wir gelernt, wie wir im kanonischen (Hamilton) Formalismus kanonische Transformationen durchführen können, also Koordinaten wählen, die Impuls- und Ortskomponenten mischen. Das kann ggf. die Bewegungsgleichungen erheblich vereinfachen. Die Hamilton-Jacobi-Theorie treibt das auf die Spitze. Für praktische Rechnungen bietet sie in seltenen Fällen Vorteile, liefert aber einen wichtigen Anschluss zur weiterführenden Theorien - zum Erscheinen der klassischen Physik als der Limes großer Skalen der Quantenphysik, und für das Erscheinen der geometrischen Optik aus der Wellenoptik

2 Hamilton-Jacobi-Gleichung

Wir betrachten eine Erzeugende für eine kanonische Transformation $W(q,Q,t)$. Wir nutzen die Formel für die transformierte Hamiltonfunktion und fordern, dass diese verschwinden soll

$$H'\left(Q,P,t\right)=H\left(q,p,t\right)+\frac{\partial W\left(q,Q,t\right)}{\partial t}=0.$$

Das lässt sich jetzt nicht ohne weiteres aufintegrieren, denn W hängt von anderen, aber nicht unabhängigen, Variablen ab als H. Wir schauen uns die Formeln für die transsformierten Impulse aus der letzten Vorlesung an

$$p_k\left(q,Q,t\right)=\frac{\partial W}{\partial \mathrm{q}_k}\quad P_k\left(q,Q,t\right)=-\frac{\partial W}{\partial Q_k}-$$

Nach Konstruktion ist $H'=0$ und so sind $Q=a$ und $P=b$ Konstanten. Damit können die die Bedingung für das Verschwinden von H' als DGL in den q_i und der Zeit schreiben

$$H\left(q_1,\ldots,q_N,\frac{\partial W\left(q,t\right)}{\partial q_1},\ldots,\frac{\partial W\left(q,t\right)}{\partial q_N}\right)+\frac{\partial W\left(q,t\right)}{\partial t}=0.$$

Da H ja aus dem behandelten System vorgegeben ist, ist diese *Hamilton-Jacobi-* Gleichung eine parzielle Differenzialgleichung erster Ordnung für W die parametrisch von den $a_i$abhängt. Diese ist nur bis auf eine additive Konstante eindeutig - es tauchen ja nur Ableitungen auf. Es ist in den meisten Fällen keine Vereinfachung der üblichen kanonischen Gleichugnen.

Haben wir damit tatsächlich eine allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen? Nach Konstruktion der kanonischen Transformation haben wir

$$p_i = \frac{\partial W(q,a,t)}{\partial q_i} \quad b_i{=}-\frac{\partial W(q,a,t)}{\partial a_i}$$

Diese $2N$ Gleichungen sind sind i.A. zu $2N$ neuen Gleichungen auflösbar, die dann die Variablen durch die Konstanten ausdrücken

$$q_i = q_i(a,b,t) \quad p_i = p_i(a,b,t)$$

was gerade die Lösungen der Bewegungsgleichungen im ursprünglichen Bezugssystem sind, die i.A. von der Zeit und den Anfangswerten abhängen - hier die Anfangswerte in den Hamilton-Jacobi-Koordinaten, also den Koordinaten, die sich einfach mit dem System mitbewegen.

Wir wollen uns jetzt noch anschauen, wie die Transformation W mit anderen Größen aus der Mechanik zusammenhängt. Dazu bilden wir ihre totale Zeitableitung

$$\begin{aligned}\frac{dW(q,Q,t)}{dt} &= \sum_i \frac{\partial W}{\partial \mathrm{q}_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial W}{\partial \mathrm{Q}_i}\dot{Q}_i + \frac{\partial W}{\partial t} \\ &= \sum_i p_i \dot{q}_i - H = \mathcal{L}\end{aligned}$$

wobei wir verwenden, dass $\dot{Q}_i = 0$ ist und W eine Lösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung. Damit ist bis auf die übliche additive Konstante

$$W = \int^t dt\prime\ \mathcal{L} = S$$

also gleich der Wirkung.

2.1 Zeitunabhängige Version

Eine Vereinfachung ergibt sich, wenn die Hamiltonfunktion nicht explizit von der Zeit abhängt. Dann können wir nämlich die Lösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung in einen koordinatenabhängigen und einen zeitabhängigen Teil trennen

$$W(q,t) = S(q) - Et.$$

Die zeitunabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung ist dann

$$H\left(q_1 \dots q_N, \frac{\partial S}{\partial q_1} \dots \frac{\partial S}{q_N}\right) = E$$

Entsprechend ist die Tranformation dann

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \quad b_i = -\frac{\partial S}{\partial a_i}.$$

3 Beispiel: Freier Fall

Wir wollen diese magische kanonische Transformation illustrieren, indem wir sie auf den freien Fall anwenden wobei wir uns auf die Bewegung in der xz Ebene beschränken. Die Hamiltonfunktion lautet

$$H = \frac{p_x^2 + p_z^2}{2m} + mgz.$$

Die Hamilton-Jacobi-Gleichung für diesen Fall ist für $S(x, z)$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 + mgz = E.$$

Mit der Lösung parzieller Differenzialgleichungen haben wir noch nicht so viel Erfahrung (lernen wir in TP 2). Hier führt der Ansatz $S(x, z) = S_1(x) + S_2(z)$ zum Ziel. Damit erhalten wir

$$\left(\frac{\partial S_1(x)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_2(z)}{\partial z}\right)^2 + 2m^2 gz = 2mE.$$

Hier hängt nur der erste Term überhaupt potenziell von x ab. Damit die Gleichung für alle x gelten kann, muss das eine Konstante sein, d.h. es gibt eine Integrationskonstante $a_2$so dass

$$\frac{\partial S_1}{\partial x} = \sqrt{a_2}$$

ist (als erste Integrationskonstante nehmen wir $a_1 = E$. Wir können so auflösen

$$\frac{\partial S_2}{\partial z} = \sqrt{2mE - a_2 - 2m^2 gz}.$$

Diese Gleichungen können wir hochintegrieren (und brauchen uns um Integrationskonstanten nicht zu scheren, da es nur auf die Ableitungen von S ankommt)

$$S_1 = x\sqrt{a_2} \quad S_2 = -\frac{1}{3m^2 g}\left(2mE - a_2 - 2m^2 gz\right)^{3/2}$$

Damit haben wir zunächst mal die Tranformation gefunden, die die Hamiltonfunktion wegdreht. Jetzt interessiert uns die Dynamik im ursprünglichen System. Wir starten mit der Transformationsgleichung

$$b_1 = t - \frac{\partial S}{\partial E} = t + \frac{1}{mg}\sqrt{2mE - a_2 - 2m^2 gz}$$

Dies lässt sich auflösen zu

$$z(t) = -\frac{g}{2}\left(t - b_1\right)^2 + \frac{2mE - a_2}{2m^2 g} = -\frac{g}{2}t^2 + c_1 t + c_2.$$

Wobei wir die verschiedenen Konstanten im letzten Schritt zu bequemeren Konstanten gruppiert haben und die bekannte Wurfparabel wiedergefunden.