Notizen zur Vorlesung über Nutation und Präzession

Frank K. Wilhelm-Mauch

23.6.15

1 Ausgangspunkt und Wiederholung

In der vorangegangenen Vorlesung haben wir die Eulergleichungen für deinen Kreisel in einem körperfesten Bezugssystem $\hat{e}_1 \quad i = 1,2,3$ entlang der Hauptachsen mit Hauptträgheitsmomtenten Θ_i hergeleitet

$$\Theta_1\dot{\omega}_1 + (\Theta_3 - \Theta_2)\,\omega_2\omega_3 = M_1 + \text{zyklisch}.$$

Im Fall des freien Kreisels sind die Drehmomente $M_i = 0$. Wir nehmen außerdem an, dass die 3- Achse des Kreisels eine Symmetrieachse (genannt Figurenachse) ist, so dass $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3$. Damit ist eine Eulergleichung $\Theta_1\dot{\omega}_3 = 0$ und so $\omega_3 = \text{const.}$. Für die anderen erhalten wir Differenzialgleichungen die bei festem ω_3 linear sind

$$\begin{aligned}\Theta_1\dot{\omega}_1 + (\Theta_3 - \Theta_1)\,\omega_3\omega_2 &= 0\\ \Theta_1\dot{\omega}_2 + (\Theta_1 - \Theta_3)\,\omega_3\omega_1 &= 0.\end{aligned}$$

Wir definieren $\Omega = \omega_3\,(\Theta_3 - \Theta_1)\,/\Theta_1$, differenzieren die erste Gleichung einmal nach der Zeit und setzen die zweite ein und erhalten

$$\ddot{\omega}_1 + \Omega^2\omega_1 = 0$$

als DGL zweiter Ordnung. Die allgemeine Lösung mit zwei Integrationskonstanten a und $\psi_0$kann geschrieben werden

$$\begin{aligned}\omega_1(t) &= a\sin(\Omega t + \psi_0)\\ \omega_2(t) &= a\cos(\Omega t + \psi_0).\end{aligned}$$

Damit ist die Dynamik von $\vec{\omega}(t)$ im KS beschrieben durch eine Kreisbewegung in der 12 - Ebene und eine konstante 3 Komponente - Die Drehachse beschreibt einen Kegel um die Figurenachse. Diese Bewegung heißt Präzession und der Kegel von $\omega(t)$ heißt *Polkegel.*

2 Präzession im Laborsystem

Wir haben jetzt also eine Körperfeste Drehachse die sich selber relativ zum Körperfesten System bewegt - dies ist eine Überlagunerung von Bewegungen, die sich nicht intuitiv im Laborsystem beschreiben lässt. Glücklicherweise haben wir das Instrumentarium der Eulerwinkel um dies umzurechnen. Da das System kräftefrei ist (also auch keine Schwerkraft wirkt!) haben wir auch dort die Wahl der Achsen frei. Da kein Drehmoment wirkt ist der Drehimpuls im Laborsystem erhalten und wir bezeichnen seine Richtung als z-Achse, $\vec{L} = L\hat{e}_z$. Die Darstellung im KS ist damit laut vorletzter Vorlesung $\vec{L} = L\left(\sin\theta\sin\psi\hat{e}_1 + \sin\theta\cos\psi\hat{e}_2 + \cos\theta\hat{e}_3\right)$. Andererseits haben wir im vorangegangenen Abschnitt ausgerechnet dass $\vec{L} = \overleftrightarrow{\Theta}\vec{\omega} = a\Theta_1\sin(\Omega t + \psi_0)\,\hat{e}_1 + a\Theta_1\cos(\Omega t + \psi_0)\,\hat{e}_2 + \Theta_3\omega_3\hat{e}_3$.

Gleichsetzen der $z-$Komponenten zeigt sofort, dass θ zeitunabhängig sein muss. Die 1 und 2 Komponenten können dann nur für alle Zeiten gesucht werden, wenn $\psi(t) = \Omega t + \psi_0$ ist. Damit können wir aus der 1 Komponente die Zeitabhängigkeit kürzen und durch die 3 -Komponente kürzen und finden

$$\tan\theta = \frac{a\Theta_1}{\omega_3\Theta_3}$$

d.h. der Öffnungswinkel zwischen den Achsen hängt von den Anfangsbedingungen in Form der anfänglichen Orientierung des Drehimpulses im Körpersystem und den Hauptträgheitsmomenten ab. Damit haben wir schon bestimmt, wie sich das KS um die Knotenachse dreht (mittels $\psi(t)$) . Wir benötigen aber noch die Bewegung der Knotenachse im Inertialsystem. Wir erinnern uns wiederum an die Umrechnung z.B. der 1 Kompotente zwischen beiden Systemen aus der vorletzten Vorlesung

$$\omega_1 = \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi + +\dot{\theta}\cos\psi.$$

Der zwweite Summand fällt weg da θ zeitlich konstant ist und wir haben somit $\dot{\phi}\sin\theta = a\Theta_1\sin\psi$und damit $\phi = \frac{a}{\sin\theta}\Theta_1 t + \phi_0$. Damit haben wir die Drehachse des Systems im Laborsystem dargstellt.

Damit ergibt sich folgendes Bild:

1. Die Figurenachse bewegt sich auf einem Kegel mit Öffnungswinkel θ um die $z-$Achse, dem Präzessionskegel
2. Wie oben schon gesagt, bewegt sich die Drehachse auf dem Polkegel um die Figurenachse. Da die Öffnungswinkel beider erwähnter Kegel zeitlich konstant sind, bewegt sich auch die Drehachse auf einem Kegel, dem Spurkegel.
3. Polkegel und Spurkegel berühren sich damit auf der Drehachse und rollen so beide auf ihr ab.

3 Schwerer Kreisel - Nutation

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir gesehen, dass die Bewegung eines kräftefreien Kreisels schon sehr viel mehr Möglichkeiten bietet als die gleichförmige

Bewegung eines freien Kreisels. Jetzt wollen wir anschaun was passiert, wenn zusätzlich die Schwerkraft angreift auf einen Kreisel, der auf der Symmetrieachse abgestützt ist. . Wie immer in der TP I starten wir mit der Lagrangefunktion. Hier stellen wir sie im IS dar, weil wir dort eine vernünftige Darstellung für die äußere Kraft haben.

Dazu benötigen wir die kinetische Energie im IS. Im KS auf Hauptachsenform wäre die Frage einfach $T_{KS} = \frac{1}{2}\sum_i \Theta_i \omega_i^2$. Zum Übergang ins Laborsystem müssen wir die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit durch Eulerwinkel darstellen. Mit den Umrechungsformeln haben wir

$$T_{IS} = \frac{\Theta_1}{2}\left(\dot{\phi}\sin\psi\sin\theta + \dot{\theta}\cos\psi\right)^2 + \frac{\Theta_2}{2}\left(\dot{\phi}\cos\psi\sin\theta - \dot{\theta}\sin\psi\right)^2 + \frac{\Theta_3}{2}\left(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}\right)^2 .$$

Wir kaprizieren uns wieder auf den symmetrischen Fall $\Theta_1 = \Theta_2$ und die ersten beiden Klammern vereinfachen sich

$$T_{IS} = \frac{\Theta_1}{2}\left(\dot{\phi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right) + \frac{\Theta_3}{2}\left(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}\right)^2 .$$

Wir können uns leicht davor überzeugen, dass die Schwerkraft so wirkt, als greife sie am Schwerpunkt an

$$U = \sum_\nu m_\nu \hat{e}_z \cdot \vec{r}_\nu = \hat{e}_z \cdot \sum_\nu m_\nu \vec{r}_\nu$$

Bei einem symmetrischen Kreisel muss der Schwerpunkt auf der Symmetrieachse liegen. Wenn s der Abstand zum Abstützpunkt ist, dann ist $U = mgs\cos\theta$.

Die gesamte Lagrangefunktion hat die drei Eulerwinkel als Freiheitsgrade. Um die Zahl der Variablen zu reduzieren nutzen wir zyklische Koordinaten. Das sind einmal ψ. Da dieser Winkel im KS gemessen wird, ist die zugehörige Erhaltungsgröße der Drehimpuls um Achse 3

$$L_3 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \Theta_3\left(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta\right)$$

.

Dann ist auch ϕzyklisch, der zugehörige Impuls ist der Drehimpuls um die z Achse

$$L_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \cos\theta L_3 + \Theta_1 \sin^2\theta\dot{\phi}.$$

Außerdem ist die Lagrangefunktion zeitunabhängig, d.h. wir haben Energieerhaltung

$$\begin{aligned} E &= \dot{\phi}L_z + \dot{\psi}L_3 + \dot{\theta}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} - \mathcal{L} \\ &= \frac{\Theta_1}{2}\left(\dot{\phi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right) + \frac{\Theta_3}{2}\left(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}\right)^2 + mgs\cos\theta. \end{aligned}$$

Diese Energie können wir jetzt, analog zum effektiven Potenzial der Drehbewegung, durch die erhaltenen Drehimpulse darstellen. Die zweite Klammer lässt sich direkt durch L_3 darstellen. Der erste Term in der ersten Klammer durch $L_z - \cos\theta L_3 = \Theta_1 \sin^2\theta\dot{\phi}$. Damit ist die Energie

$$
\begin{aligned}
E\left(\dot{\theta},\theta\right) &= \frac{\Theta_1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{\left(L_z - \cos\theta L_3\right)^2}{2\Theta_1 \sin^2\theta} + \frac{L_3^2}{2\theta_3} + gms\cos\theta \\
&= \frac{\Theta_1}{2}\dot{\theta}^2 + U_{\text{eff}}\left(\theta\right).
\end{aligned}
$$

Damit haben wir wieder ein eindimensonales Energieerhaltungsproblem, das wir durch Variablentrennung analysieren können. Das erhaltene Integral ist kompliziert und lässt sich mittels elliptischer Integrale (siehe Pendel) auswerten. Das wollen wir nicht tun, sonder die Bewegung qualitativ analysieren: An den Grenzen des Wertebereichs $0 \leq \theta \leq \pi$ divergiergt U_{eff} d.h. die Drehachse pendelt zwischen zwei Winkeln θ hin und her ohne sich zu überschlagen. Diese Bewegung gibt ein weiteres Taumeln der Figurenachse, die Nutation.