

Kapitel 5

Elektromagnetische Felder in Medien

Im Allgemeinen laufen elektromagnetische Wellen (bzw. statische Felder) nicht im Vakuum, sondern interagieren mit einem Medium. Im Labor ist das oft Luft, die auf kurzen Distanzen dem Vakuum sehr ähnelt, nicht aber auf langen - letztlich sind optische Phänomene wie die Biegung von Lichtstrahlen über heißen Straßen (“Mirage”) ausschließlich auf den Eigenschaften von Luft erklärbar. Kondensierte (flüssige, feste) Medien beeinflussen den Elektromagnetismus auf viel kürzeren Skalen und stehen im Zentrum dieses Kapitels. Die Modelle, die wir beinhalten, sind letztlich stark vereinfacht - ein großer Teil der aktuellen Festkörperphysik beschäftigt sich mit optischen Eigenschaften bestimmter Materialien.

5.1 Makroskopische Felder

Im Prinzip sind die Maxwellgleichungen in der gegebenen Form aus Kapitel 1 vollständig, auch in der Anwesenheit eines Mediums. Sie gelten für die mikroskopischen Felder zwischen den Bestandteilen des Mediums und dem äußeren Feld, und den Bestandteilen untereinander. Es ist aber oft praktisch, eine effektive Beschreibung der Felder in Medien zu finden, in denen nur makroskopische Felder vorkommen, bei denen die molekulare Skala der Materie nicht mehr auftaucht. Wir wollen hier anschauen, wie die makroskopischen Gleichungen aus den mikroskopischen Gleichungen entstehen.

Wir führen für die mikroskopischen Größen Kleinbuchstaben ein und schrei-

ben

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{e} &= \eta/\epsilon_0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{b} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{e} + \dot{\vec{b}} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{b} - \epsilon_0 \mu_0 \dot{\vec{e}} &= \mu_0 \vec{J}.\end{aligned}$$

Hier sind η und \vec{J} die gesamten, mikroskopischen Ladungs- und Stromdichten. Die vertrauten Größen ρ und \vec{j} benutzen wir für die freien, nicht an Materie gebundene Größen. Wir nennen die makroskopischen Felder \vec{E} und \vec{D} . \vec{E} entsteht aus \vec{e} durch makroskopisches Glätten - wie genau, wird unten erklärt. \vec{D} trägt der makroskopischen Polarisierbarkeit des Mediums Rechnung. Ähnliches gilt für die Größen \vec{b} , \vec{B} und \vec{H} .

Jetzt betrachten wir die Prozedur des *makroskopischen Glättens*. Wir betrachten eine Größe $f(\vec{r})$ die auf einer mikroskopischen Skala stark strukturiert ist. Naiv könnten wir eine Glättung einführen, indem wir f über ein Volumen V um \vec{r} interieren, z.B. eine Kugel vom Radius \vec{R}

$$\frac{1}{V} \int_V d^3 r' f(\vec{r}') = \frac{3}{4\pi R^3} \int d^3 r' f(\vec{r}') \Theta(R - |\vec{r} - \vec{r}'|).$$

Diese Mittlung glättet aber nur recht unbefriedigend: Wenn wir die Kante der Mittelungskugel über eine stark oszillierende Struktur schieben, erhalten wir immer noch eine recht raue Struktur. Zum wirklichen Glätten erstein führen wir eine Mittelungsfunktion ein, die nur Strukturen auf der gewünschten Mittelungsskala hat, z.B. eine Gaußkurve der Breite R . Wir nennen diese Funktion w und haben damit für das makroskopische Mittel

$$\langle f(\vec{r}) \rangle = \int d^3 r' f(\vec{r}') w(\vec{r} - \vec{r}').$$

Diese Glattheit erlaubt es uns, Ableitung und Glättung zu vertauschen in der Form

$$\frac{\partial \langle f \rangle}{\partial x} = \int d^3 r' f(\vec{r}') \frac{\partial f(\vec{r} - \vec{r}')}{\partial x} = - \int d^3 r' f(\vec{r}') \frac{\partial f(\vec{r} - \vec{r}')}{\partial x'}$$

Jetzt nutzen wir, dass w eine vernünftige Funktion ist und integrieren partiell nach x' . Die Grenzterme verschwinden und wir erhalten

$$\frac{\partial \langle f \rangle}{\partial x} = \int d^3 r' \frac{\partial f(\vec{r}')}{\partial x'} w(\vec{r} - \vec{r}') = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle.$$

Mit dieser Definition ist dann also

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \langle \vec{e}(\vec{r}, t) \rangle \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \left\langle \vec{b}(\vec{r}, t) \right\rangle.$$

Damit erhalten wir durch makroskopische Mittelung

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \langle \eta \rangle / \epsilon_0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \dot{\vec{E}} &= \mu_0 \langle \vec{J} \rangle.\end{aligned}$$

5.2 Makroskopische Felder und Lorentzoszillatoren

Um eine Verknüpfung zwischen dem gemittelten Feld \vec{E} und der Ladungsdichte $\langle \eta \rangle$ herzustellen. Dies kommt natürlich stark auf das Medium an. Das hier exemplarisch diskutierte Modell der *Lorentzoszillatoren* ist gut für polare Isolatoren. Die Grundidee ist, dass das äußere Feld das Medium polarisiert und dass die entstehende Polarisation wiederum zum mittleren Feld beiträgt. Wir definieren dafür das neue Feld $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$. Analoges gilt mit der Magnetisierung $\vec{H} = \vec{B} / \mu_0 - \vec{M}$.

Als Modell für das Medium nehmen wir ein Ensemble von Molekülen. Sei \vec{r}_A der Ortsvektor einer freien Ladung q_A und \vec{v}_A seine Geschwindigkeit. Sei \vec{r}_n der Ort des Schwerpunkts des Moleküls und \vec{r}_B der Ort einer gebundenen Ladung q_B . Damit können wir die Ladungsdichten definieren

$$\begin{aligned}\eta_{\text{frei}}(\vec{r}, t) &= \sum_A q_A \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_A(t)) \\ \eta_{\text{geb}}(\vec{r}, t) &= \sum_n \eta_n \quad \eta_n(\vec{r}, t) = \sum_B q_B \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_n - \vec{r}_B).\end{aligned}$$

Hier ist also η_n die Ladungsdichte in einem einzelnen Molekül, das wir als neutral annehmen, also $\sum_B q_B = 0$. Diese Ladungsdichte wollen wir nach unserer makroskopischen Mittelungsvorschrift glätten und finden $\langle \eta_n \rangle = \sum_B q_B w(\vec{r} - \vec{r}_n - \vec{r}_B)$.

Da w auf der Skala eines Moleküls r_B nur schwach variiert, können wir Taylorentwickeln zu

$$\langle \eta_n \rangle = \sum_B q_B [w(\vec{r} - \vec{r}_n) - \vec{r}_B \cdot \nabla w(\vec{r}_n) + O(r_n^2)] \simeq -\vec{p}_n \cdot \nabla w(\vec{r}_n).$$

Im letzten Schritt haben wir die Neutralitätsbedingung ausgenutzt und das molekulare Dipolmoment $\vec{p}_n = \sum_B q_B \vec{r}_B$ eingeführt. Damit können wir die gemittelten gebundenen Ladungen schreiben als

$$\langle \eta_{\text{geb}} \rangle = - \sum_n \vec{p}_n \cdot \vec{\nabla} w = - \vec{\nabla} \cdot \left\langle \sum_n \vec{p}_n \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_n) \right\rangle \equiv - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

wobei \vec{P} die makroskopische Polarisation des Mediums ist. Die gemittelte freie Ladungsdichte ist einfach $\langle \eta_{\text{frei}} \rangle = \langle \sum_A q_A \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_A) \rangle$. Damit die totale

Ladungsdichte in der Dipolnäherung $\langle \eta \rangle = \rho - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}$, die Maxwellgleichung für \vec{E} ist entsprechend $\rho = \vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{D}$ was als Definition des makroskopischen Feldes \vec{D} dient. Eine ähnliche Diskussion kann für magnetische Systeme geführt werden, allerdings mit einem kleineren Anwendungsbereich.

Im weiteren möchten wir uns stärker spezialisieren, indem wir ein Modell zur Verknüpfung von \vec{E} und \vec{P} einführen. In diesem Modell nehmen wir an, dass die Atome nur leicht aus ihren Gleichgewichtspositionen ausgelenkt werden und damit als harmonische Oszillatoren linear auf das äußere Feld antworten. Wir nehmen ferner an, dass die Moleküle so klein sind, dass sie zwar elektrische Dipole erzeugen, aber keine magnetischen, d.h. $\vec{M} = 0$. Ferner sollen im Medium keine freien Ladungen oder Ströme vorhanden sein. Damit haben die Maxwellgleichungen im Medium die Form

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= 0\end{aligned}$$

sowie $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$. Wir suchen Lösungen in der Form monochromatischer Wellen und Fouriertransformieren darum die Gleichungen bezüglich der Zeit. Die erhaltenen Felder kennzeichnen wir durch eine Schlange und haben

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{\tilde{D}} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{\tilde{B}} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{\tilde{E}} - i\omega \vec{\tilde{B}} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{\tilde{B}} + i\mu_0 \omega \vec{\tilde{D}} &= 0\end{aligned}\tag{5.1}$$

sowie $\vec{\tilde{D}} = \epsilon_0 \vec{\tilde{E}} + \vec{\tilde{P}}$. Um jetzt eine konstituierende Beziehung zwischen \vec{E} und \vec{P} zu erhalten. Dazu investieren wir jetzt unsere Annahme kleiner Auslenkungen $\vec{\xi}_B$ der Bestandteile des Moleküls vom Gleichgewicht. Diese haben also die Bewegungsgleichungen des harmonischen Oszillators

$$m_B \left(\ddot{\vec{\xi}}_B + \gamma \dot{\vec{\xi}}_B + \omega_0^2 \vec{\xi}_B \right) = q_B \vec{\tilde{E}}(\vec{r}_n, \omega) e^{-i\omega t}$$

Hier nehmen wir das gemittelte Feld \vec{E} im Zentrum des Moleküls - es variiert ja ohnehin langsam über das Molekül hinweg. Für die Lösung der Bewegungsgleichung machen wir den Ansatz $\vec{\xi}_B(t) = \vec{\tilde{\xi}}_B e^{-i\omega t}$, setzen ein und erhalten

$$\vec{\tilde{\xi}}_B(\omega) = \frac{q_B/m_B}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \vec{\tilde{E}}(\vec{r}_n, \omega).$$

Jetzt nehmen wir noch an, dass die Bestandteile des Moleküls alle die Elementarladung tragen und dass wir Z von ihnen pro Molekül haben. Damit ist

insgesamt

$$\tilde{p}_n(\omega) = \frac{Ze^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \tilde{E}(\vec{r}_n, \omega).$$

Dies können wir mitteln und glätten zur Polarisation

$$\tilde{P}(\vec{r}, \omega) = \left\langle \sum_n \tilde{p}_n \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_n) \right\rangle = \frac{Ze^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \tilde{E}(\vec{r}, \omega) N$$

mit $N(\vec{r}) = \langle \sum_n \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_n) \rangle$ als Volumendichte der Moleküle. Wir sehen das, wie bei kleinen Auslenkungen erwartet ist, die Beziehung zwischen \tilde{E} und \tilde{D} bzw. \tilde{P} linear ist. Wir können schreiben $\tilde{D}(\vec{r}, \omega) = \epsilon(\omega) \tilde{E}(\vec{r}, \omega)$ mit der dielektrischen Funktion $\epsilon(\omega)$ so dass

$$\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0} = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \quad \omega_p = \sqrt{\frac{Ze^2 N}{\epsilon_0 m}}. \quad (5.2)$$

Die Frequenz ω_p heißt Plasmafrequenz - eine Bezeichnung, die sich uns erst später erschließen wird. Hier sind wir davon ausgegangen, dass alle Elektronen die gleiche natürliche Frequenz ω_i haben. Bei komplexen mehratomigen Molekülen ist dies nicht wahrscheinlich. Wenn wir die Molekülsorten mit j bezeichnen und ihren jeweiligen Anteil mit f_j , so verallgemeinert sich die dielektrische Funktion zu

$$\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0} = 1 + \omega_p^2 \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}.$$

Der Übersichtlichkeit halber diskutieren wir im Folgenden aber nur den Fall einer einzigen Spezies Atome. Wir sehen hier eine frequenzabhängige Verallgemeinerung der Dielektrizitätskonstante, über die Sie schon in der Experimentalphysik gelernt haben. Verschiedenes fällt auf: Diese Funktion hat eine Resonanz bei $\omega = \omega_0$. Sie ist komplex, wobei

$$\text{Im}\epsilon(\omega) = \frac{\gamma\omega\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$$

stets positiv ist und ein Maximum an der Resonanz hat, während es in den Extrema verschwindet. Andererseits ist

$$\text{Re}\epsilon(\omega) = 1 + \omega_p^2 \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$$

eine nichtmonotone Funktion. Der Zweite Term kann negativ werden bei $\omega \gtrsim \omega_0$. Die Konsequenzen dieses Verhaltens werden im nächsten Abschnitt diskutiert.

5.3 Wellenpropagation in Medien

Wir suchen jetzt nach Wellenlösungen der Maxwellgleichungen im Medium (5.1) mit der konstituierenden Relation (5.2). Wir können daraus leicht (Übung) die Wellengleichung in der Frequenzdomäne herleiten

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c(\omega)^2}\right) \tilde{\vec{E}}(\vec{r}, \omega) = 0.$$

wobei wir eine frequenzabhängige Lichtgeschwindigkeit eingeführt haben $c^2(\omega) = c_0^2 \epsilon_0 / \epsilon(\omega)$ wobei c_0 die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist. Äquivalent kann man sagen $c = (\epsilon\mu)^{-1/2}$. Damit können wir wiederum ebene Wellen ansetzen mit einer Wellenzahl $k^2 = \omega^2 / c^2(\omega)$. Da wie schon oben gesagt ϵ echt komplex ist, können wir auch die Wurzel in Real- und Imaginärteil zerlegen, $k = k_R + ik_i$ und erhalten für die räumliche Struktur der Lösung wenn z.B. die Welle entlang der z -Achse propagiert

$$\vec{E}(\vec{r}, \omega) = \vec{E}_0 e^{-k_i z} e^{ik_r z} e^{-i\omega t}.$$

Wir sehen, dass der Imaginärteil der Wellenzahl Absorption der Welle durch das Medium (und letztlich in den Dissipationsmechanismus des Mediums) beschreibt und der Realteil Propagation. Die Flächen konstanter Phase sind Ebenen, die sich mit einer Geschwindigkeit $v_\phi = \omega / k_r(\omega)$ ausbreiten, der Phasengeschwindigkeit. Wir sehen, dass alle diese Größen jetzt eine strukturierte Frequenzabhängigkeit haben. Solche Modelle, von denen das Lorentz-Oszillator-Modell nur ein Beispiel ist, heißen *dispersiv*.

Wir wollen uns jetzt allgemein mit der Wellenausbreitung in dispersiven Medien auseinandersetzen. Wir nehmen also eine gegebene Relation $k(\omega)$ an und beschränken uns der Einfachheit halber auf eine Raumdimension und bezeichnen die wellenartige Observalbe als ψ . ψ kann z.B. eine der Komponenten der Felder sein. Monochromatische Wellen, also Wellen deren Fouriertransformierte nur ein einziges Dirac-Delta ist, sind letztlich nicht realistisch, denn die müssen ja unendlich lang sein. Tatsächlich kann man zeigen (Übung!), dass die Länge eines Wellenpaketes invers proportional zur Breite seiner Fouriertransformierten ist. Wir setzen also an, dass reale Wellen stets Pakete sind. Wir zerlegen ein solches Paket nach ebenen Wellen

$$\psi(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \left[A(k) e^{i\omega(k)t} + A^*(k) e^{-i\omega(k)t} \right] e^{ikz}. \quad (5.3)$$

Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass das Anfangsprofil zeitsymmetrisch ist, also $A(k) = A^*(k)$. Außerdem nehmen wir an, dass wir versucht haben, eine monochromatische Welle zu präparieren, d.h. $A(k)$ ist stark gepeakt bei einem Wert k_0 . Wir nehmen auch an, dass die Dispersion nicht zu dramatisch ist, dass wir also z.B. nicht gerade nah an einer schmalbandigen Resonanz sind. Damit ist eine Taylorentwicklung eine gute Näherung

$$\omega(k) = \omega_0 + \omega'_0(k - k_0) = \omega_0 - \omega'_0 k_0 + \omega'_0 k \quad \omega_0 = \omega(k_0)$$

Damit erhalten wir als Näherungsdruck für unser Wellenpaket

$$\begin{aligned}
 \psi &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk A(k) \left[e^{ik(z+\omega'_0 t)} e^{i(\omega_0 - \omega'_0 k_0)t} + e^{ik(z-\omega'_0 t)} e^{-i(\omega_0 - \omega'_0 k_0)t} \right] \\
 &= \frac{e^{i(\omega_0 - \omega'_0 k_0)t}}{\sqrt{2\pi}} \int dk A(k) e^{i(z+\omega'_0 t)k} + \frac{e^{-i(\omega_0 - \omega'_0 k_0)t}}{\sqrt{2\pi}} \int dk A(k) e^{i(z-\omega'_0 t)k} \\
 &= e^{i(\omega_0 - \omega'_0 k_0)t} \psi(z + v_g t) + t \leftrightarrow -t \quad v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0}
 \end{aligned}$$

Wir sehen, dass sich (aufgrund der zeitlichen Symmetrie der Anfangsverteilung) sich das Wellenpaket in zwei gegenläufig propagierende Hälften teilt. Der Ursprung dieser Hälfte bewegt sich mit der Geschwindigkeit v_g , der Gruppengeschwindigkeit der Welle. Zusätzlich sehen wir am Phasenfaktor, dass die Welle auch ihre Form ändert. Die genaue Form der Gruppengeschwindigkeit für das Lorentzoszillatormodell diskutieren wir in den Übungen.

Als Beispiel für den Effekt von Dispersion auf die Wellenausbreiten betrachten wir in Gaussssches Wellenpaket mit einer Trägerfrequenz k_0

$$\psi(z, 0) = e^{-z^2/2L^2} \cos k_0 z$$

und da wir oben eine zeitsymmetrische Anfangsbedingung angenommen haben ist $\dot{\psi}(z, 0) = 0$. Als beispielhafte Dispersionsrelation nehmen wir $\omega(k) = \nu(1 + \alpha^2 k^2/2)$.

Bevor wir uns weiteren Rechnungen zuwenden erinnern wir uns an die Berechnung von Gauß-Integralen mittels quadratischer Ergänzung. Dies sind Integrale über eine Exponentialfunktion deren Exponent ein Polynom zweiter Ordnung ist. Genauer, mit $\text{Re} a > 0$,

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-ax^2 + bx + c) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp \left[-a \left(x - \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) + c + \frac{b^2}{4a} \right] \\
 &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp \left(c + \frac{b^2}{4a} \right).
 \end{aligned}$$

Damit können wir jetzt die Fourieramplituden in Gl. (5.3) berechnen. Bei $t = 0$ ist dies ja gerade eine Fourierdarstellung und wir können diese invertieren zu

$$\begin{aligned}
 A(k) &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dz \psi(z, 0) e^{-ikz} \\
 &= \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dz e^{-z^2/2L^2} \left[e^{-i(k-k_0)z} + e^{i(k+k_0)z} \right] \\
 &= \frac{L}{4} \left(e^{-L^2(k-k_0)^2/2} + e^{-L^2(k+k_0)^2/2} \right)
 \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt obige Formel für Gausssche Integrale angewandt haben. Wir beobachten, was wir schon oben gesagt haben: Die Breite der Gauskurve für ψ ist L , für A ist sie $1/L$ - je breiter die Verteilung im Ortsraum desto

schmäler im Impulsraum. Man kann zeigen, dass diese Relation, $\Delta\psi = 1/\Delta A$ optimal ist, man kann die Kurven nicht gemeinsam schmaler machen. Dies werden Sie in der Quantenmechanik als Unschärferelation wiedersehen. Aber schon heute haben Sie es gehört: Wenn man schnelle Signale übergragen will, also mit hoher Zeitaufösung, dann braucht man ein breites Frequenzband, z.B. bei mobilen Daten.

Jetzt wollen wir aber die Propagation anschauen, indem wir in Gl. (5.3) einsetzen. Wir formen um

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk A(k) e^{i(kz - \omega t)} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk A(k) e^{i(kz + \omega t)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk A(k) e^{i(kz - \omega(k)t)} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk A(-k) e^{i(-kz + \omega(-k)t)}.\end{aligned}$$

Da die Funktionen alle gerade in k sind, können wir dies schreiben als

$$\begin{aligned}\psi &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Re} \int dk A(k) e^{i(kz - \omega(k)t)} \\ &= \frac{L}{2\sqrt{2\pi}} \operatorname{Re} \int dk e^{-L^2(k-k_0)^2/2} e^{i(kz - \omega(k)t)} + k_0 \leftrightarrow -k_0.\end{aligned}$$

Aufgrund des quadratischen Ansatzes für $\omega(k)$ ist dies ein Gaußsches Integral (mit relativ langen Vorfaktoren). Einsetzen in die Formel und Zusammenbauen der Ausdrücke liefert

$$\psi(z, t) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + i\nu t f^2}} \exp\left(-\frac{(z - v_g t)^2}{2L^2(1 + i\nu t f^2)}\right) e^{i(k_0 z - \omega(k_0)t)} + k_0 \leftrightarrow -k_0 \right].$$

Hier haben wir definiert $f = \alpha/L$ und $v_g = \partial\omega/\partial k|_{k_0} = \nu\alpha^2 k_0$. Wir sehen hier, dass das Wellenpaket sich tatsächlich mit der Gruppengeschwindigkeit bewegt, seine Gaußsche Form behält, aber zeitlich gemäß $L\sqrt{1 + i\nu t f^2}$ breiter wird - es zerfließt.

5.4 Oberflächen zwischen Medien: Statische Phänomene

Selbst im statischen Fall entstehen interessante Phänomene an der Oberfläche von Dielektrika bzw. Metallen. Diese treten natürlich in statischen Aufbauten auf. Wir haben eine Reihe von Methoden zur Lösung statischer Probleme kennengelernt. Während die elektrischen Felder im Medium geglättet sind, wie zu Beginn dieses Kapitels gezeigt, muss die Änderung des Mediums auf atomarer Skala durch *Anschlussbedingungen* beschrieben werden. Zu deren Diskussion greifen wir auf die Maxwellgleichungen im Medium zurück.

Wir betrachten zunächst die elektrischen Felder an der neutralen Oberfläche eines Dielektrikums. Wir legen eine dünne "Gauß-Schachtel" (Zeichnung in der

Vorlesung) um die Oberfläche. Da die Quellen des \vec{D} -Feldes freie Ladungen sind, die Oberfläche aber neutral sein soll, ist in der Schichten $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$. Da die Schicht infinitesimal dünn ist, ist damit die Normalkomponente von \vec{D} an der Oberfläche stetig.

Auch im Medium ist im statischen Fall $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$. Wenn wir jetzt Flächenelement senkrecht zur Oberfläche des Dielektrikums legen und wiederum die senkrechten Seiten infinitesimal machen, dann ist das Umlaufintegral die Differenz der Tangenzialkomponenten von \vec{E} - nach dem Satz von Stokes ist das gleich null, also sind die Tangenzialkomponenten von \vec{E} stetig. Mit analogen Argumenten kann man auf der magnetischen Seite zeigen, dass die Normalkomponente von \vec{B} und die Tangenzialkomponente von \vec{H} stetig sind. Mit diesen Anschlussbedingungen können statische Probleme in der Anwesenheit von Dielektrika gelöst werden.

5.4.1 Beispiel: Dielektrische Kugel im elektrischen Feld

Wir betrachten eine Kugel mit Radius R Dielektrizitätskonstante ϵ in einem konstanten äußeren Feld entlang dessen wir die z -Achse legen. Für das Feld außerhalb der Kugel setzen wir an, unter Ausnutzung der azimuthalen Symmetrie

$$\phi_{\text{aus}} = \sum_l^{\infty} \left(B_l r^l + C_l r^{-(l+1)} \right) P_l(\cos \theta)$$

sowie innen, wo das Feld beschränkt bleiben muss

$$\phi_{\text{in}} = \sum_l A_l r^l P_l(\cos \theta).$$

Aufgrund der Randbedingung ist $\phi_{\text{aus}}(r \rightarrow \infty) = -E_0 z = -E_0 r \cos \theta$ also ist $B_1 = -E_0$ und alle anderen $B_l = 0$. Die Randbedingung für das tangenziale E -Feld ist

$$\frac{\partial \phi_{\text{in}}}{\partial \theta} = \frac{\partial \phi_{\text{out}}}{\partial \theta} \Rightarrow A_1 = -E_0 + \frac{C_1}{R^3} \quad A_{l \neq 1} = \frac{C_l}{R^{2l+1}}$$

sowie für das normale Feld

$$\epsilon \frac{\partial \phi_{\text{in}}}{\partial r} = \frac{\partial \phi_{\text{out}}}{\partial r} \Rightarrow \epsilon A_1 = -E_0 - 2 \frac{C_1}{R^3} \quad \epsilon A_{l \neq 1} = -(l+1) \frac{C_l}{R^{2l+1}}.$$

Dieses liefert bei festem l ein lineares Gleichungssystem für die A_l und C_l . Für $l \neq 1$ ist $A_l, C_l = 0$ die eindeutige Lösung. Für $l = 1$ haben wir

$$A_1 = -\frac{3}{2+\epsilon} E_0 \quad C_1 = \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} R^3 E_0$$

und das Potenzial ist

$$\phi_{\text{in}} = -\frac{3}{2+\epsilon} E_0 z \quad \phi_{\text{out}} = -E_0 z + \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} \frac{R^3}{r^2} E_0 \cos \theta.$$

Das konstante elektrische Feld dringt also in abgeschwächter Form in die Kugel ein, dies führt in der Umgebung der Kugel zu einer Feldverzerrung in Form eines Dipols.