# Kapitel 8

# (Relativistische) Teilchen und Felder

In diesem Abschnitt wollen wir einerseits Strahlung von Ladungen behandeln, deren Geschwindigkeit mit der Lichtgeschwindkeit vergleichbar ist und damit über die Multipolstrahlung hinausgehen. Andererseits interessiert und die Wechselwirkung von Teilchen mittels elektromagnetischer Felder. Dazu gehört auch die Wechselwirkung eines Teilchens mit seinem eigenen Feld.

## 8.1 Wirkungsprinzip für die klassische Elektrodynamik

In der klassischen Mechanik wurden Wirkungsprinzipien (Lagrange, Hamilton) stark betont, da sie sowohl die Struktur der Theorie erhellen, als auch viele Rechnungen, insbesondere die mit Zwangsbedingungen, stark vereinfachen. Diese gibt es auch in der klassischen Elektrodynamik, wobei sie hier mehr für die Struktur der Theorie wichtig sind und weniger konkrete Rechenmethoden angeben.

Zunächst einmal müssen wieder zurück zur Struktur gehen: Während in der Mechanik die Wirkung ein Funktional der Koordinaten ist, das sich durch Integration einer Lagrangefunktion über die Zeit augedrückt weden kann, haben wir in der Elektrodynamik eine Feldtheorie. Wir gehen einfach analog vor: Die Variablen der Elektrodynamik sind die Felder, also muss die Wirkung ein Funktional der Felder sein und das Integral läuft über die Parameter, also Raum und Zeit. Den Integranden nennen wir Lagrangedichte $L$ .

Entsprechend müssen die Euler-Lagrange-Gleichungen verallgemeinert werden. Wir tun dies zunächst allgemein, für beliebige Felder $\{u_i\}$ die von Variablen $\{x_1, \ldots, x_d\}$ abhängen. Die Wirkung ist damit

$$S = \int_V d^d x \; L\left(\{u_i\}, \{u_{i,j}\}, x_j\right).$$

Hier ist $V$ ein $d$-dimensionales Volumen. In Lagrangeschen Variationsproblemen geben wir Randbedingungen vor - hier auf der Oberfläche $\partial V$. Wir suchen Felder $u_i$ die die Wirkung stationär machen. d.h. für kleine Änderungen $u_i \to u_i + \delta u_i$ soll die Wirkung stationär sein in erster Ordnung, $\delta S = 0$. Wir schreiben $\delta u_i = \alpha \eta_i \left(\{x_j\}\right)$, damit wir einfacher Potenzen zählen können. Wir erhalten

$$\left.\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = \int_V d^d x \ \left[\sum_i \frac{\partial L}{\partial u_i}\eta_i + \sum_{i,j} \frac{\partial L}{\partial u_{i,j}} \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j}\right].$$

Wir können jetzt (streifenweise) die zweite Summe parziell nach $x_j$ und nutzen, dass $\eta_i$ auf der Oberfläche verschwindet, da wir ja Randbedingungen vorgegeben haben. Damit haben wir

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} &= \int_V d^d x \ \left[\sum_i \frac{\partial L}{\partial u_i}\eta_i - \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial L}{\partial u_{i,j}} \eta_i\right]. \\ &= \int_V d^d x \ \sum_i \eta_i \left[\frac{\partial L}{\partial u_i} - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial L}{\partial u_{i,j}}\right] = 0.\end{aligned}$$

Da diese Variation unabhängig von der Wahl der$\eta_i$ verschwinden soll. Damit müssen alle eckigen Klammern verschwinden - dies sind die Euler-Lagrange-Gleichungen für Felder

$$\frac{\partial L}{\partial u_i} = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial L}{\partial u_{i,j}}.$$

Dieses Ergebnis kann auf viele Variationsprobleme in der Physik angewandt werden.

In der Elektrodynamik haben wir einen Teil der Lagrangedichte schon gefunden: Die Kopplung an Punktladungen war schon bei der Lorentzkraft $-q u_\mu A^\mu$. Im Kontinuumslimes wird das zu $-\frac{1}{c} j_\mu A^\mu$. Jetzt brauchen wir noch den Beitrag freier Felder. Klar ist: Für eine Differenzialgleichung in den Feldern muss diese auch von den Feldern $F^{\mu\nu}$abhängen. Für eine lineare Differenzialgleichung muss die Lagrangedichte quadratisch in den Feldern sein. Und zur Garantie der Lorentzinvarianz sollte Lagrangedichte ein Lorentzskalar sein. Damit bleibt bis auf einen Vorfaktor nur $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$. Die Lagrangedichte ist dann insgesamt

$$L\left(\{A^\mu\}, \{\partial^\nu A^\mu\}, \{x^\nu\}\right) = -\frac{1}{c}\left[j_\mu A^\mu + \frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}\right].$$

Hier ist zu bedenken, dass die Variablen, die variiert werden, keine Obersvablen sind, sondern die Potenziale $A^\mu$ - zu den profunden Folgen dieser Beobachtung später. Außerdem sind die ko- und kontravarianten Komponenten des Feldtensors nicht unabhängig im Sinne der Variationsrechnung, wir müssen sie also mittels metrischem Tensor ineinander umrechnen. Jetzt schauen wir die Euler-Lagrangegleichung an und finden

$$0 = \frac{\partial L}{\partial A_\mu} - \partial^\nu \frac{\partial L}{\partial A_{\mu,\nu}} = -\frac{1}{c}\left[j^\nu + \frac{1}{\mu_0}\partial_\nu F^{\nu\mu}\right]$$

also nichts anderes als die inhomogenen Maxwellgleichungen in relativistischer Notation. Wir können also zusammenfassend beobachten, dass die Form der Maxwellgleichungen aus der (von der Lorentzkraft erzwungenen) bilinearen Kopplung an die Ströme, Lorentzvinarianz (einschließlich der Form der Feldtensoren) und Linearität festgelegt wird.

Jetzt wollen wir noch kurz die Konsequenzen von Eichtransformationen auf die Wirkung behandeln. Klarerweise sollte eine Eichtransformation die Wirkung nur auf eine Art und Weise ändern, die die Maxwellgleichungen nicht beeinflusst. Es ist

$$S \to S_0 + \frac{1}{c}\int d^4x\ j_\mu \partial^\mu f = S_0 + \frac{1}{c}\int d^4x\ \partial^\mu \left(f j_\mu\right) - \frac{1}{c}\int d^4x\ f\partial^\mu j_\mu.$$

Der mittlere Term ist eine Viererdivergenz, kann also als Oberflächenintegral geschrieben werden und ist damit lediglich eine Konstante. Darum muss der letzte Term verschwinden, für alle Eichfunktionen $f$. Das erzwingt also $\partial^\mu j_\mu = 0$ - die Ladungserhaltung. Die Eichsymmetrie erzwingt also Ladungserhaltung - ein typisches Prinzip sogennter Eichtheorien. Im Prinzip ließe sich hieraus die gesamte Elektrodynamik aufbauen - so wird das z.B. im zweiten Band von Landau-Lifschitz gemacht.

## 8.2 Fernfeld einer bewegten Ladung

Wir wollen jetzt genauer die Strahlung im Fernfeld bewegter Ladungen betrachten, ohne eine Entwicklung in langsamen Ladungen, also in Strahlungsmultipolen, durchzuführen. Wir schreiben die Greensfunktionslösung für die Potenziale

$$A^\nu\left(\vec{r},t\right) = \frac{\mu_0}{4\pi} = \int d^3r' dt'\ \frac{\delta\left(\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|/c - (t-t')\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|} j^\nu\left(\vec{r}',t'\right).$$

Dies ist ein Faltungsintegral in der Zeit, kann also in der Frequenz als Produkt geschrieben werden

$$A^\nu\left(\vec{r},\omega\right) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \frac{e^{i\frac{\omega}{c}\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|} j^\nu\left(\vec{r}',\omega\right).$$

Wir gehen jetzt ins Fernfeld für $|\vec{r}-\vec{r}'|$ und führen den 'Beobachter-Wellenvektor' $\vec{k} = \omega\vec{r}/rc$ und haben näherungsweise

$$A^\nu_{\text{fern}}\left(\vec{r},\omega\right) = \frac{\mu_0}{4\pi r} e^{i\omega r/c}\int d^3r'\ e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}'} j^\nu\left(\vec{r}',\omega\right) = \frac{\mu_0}{4\pi r} e^{i\omega r/c}\tilde{j}^\nu\left(\vec{k},\omega\right)$$

wobei wir die räumliche Fouriertransformierte $\tilde{j}$ eingeführt haben. Das Fernfeld ist wird also durch eine Kugelwelle beschrieben, die bestimmte Fourierkomponenten herausgreift.

Jetzt wollen wir das elektrische Feld ausarbeiten. Wir schreiben $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \dot{\vec{A}}$ im Fourierraum um zu

$$\vec{E}\left(\vec{r},\omega\right) = i\frac{\omega}{c}\frac{e^{i\omega r/c}}{r}\left(\frac{\vec{\tilde{j}}}{c} - \hat{e}_r\rho\right)$$

Wir nutzen jetzt die Kontinuitätsgleichung im Fourierraum um $\rho$ durch $\tilde{\vec{j}}$ auszudrücken und erhalten unter Nutzung von Kreuzproduktidentitäten

$$\begin{aligned}\vec{E}\left(\vec{r},\omega\right) &= i\frac{\omega}{c^2}\frac{e^{i\omega r/c}}{r}\left(1-\frac{\vec{r}\vec{r}^T}{r^2}\right)\tilde{\vec{j}} \\ &= -i\frac{\omega}{c^2}\frac{e^{i\omega r/c}}{r^3}\vec{r}\times\left(\vec{r}\times\tilde{\vec{j}}\right) = -\vec{r}\times\vec{B}/r\end{aligned}$$

wobei wir $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$ genutzt haben und das Konstrukt $\vec{r}\vec{r}^T$ ist eine Matrix - sozusagen das umgekehrte Skalarprodukt. Die Welle ist also weiterhin transversal. Wir interessieren uns wiederum für den Poynting-Vektor, genauer gesagt sein Zeitmittel

$$\begin{aligned}\int dt\ \vec{S}\left(\vec{r},t\right) &= \frac{1}{\mu_0}\int\frac{dt d\omega d\omega'}{(2\pi)^2}\vec{E}\left(\vec{r},\omega\right)e^{i\omega t}\times e^{i\omega' t}\vec{B}\left(\vec{r},\omega\right) \\ &= \frac{1}{\mu_0}\int\frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2}\vec{E}\left(\vec{r},\omega\right)\times\vec{B}\left(\vec{r},\omega\right)\int dt\ e^{i\left(\omega+\omega'\right)t} \\ &= \frac{1}{\mu_0}\int\frac{d\omega}{2\pi}\vec{E}\left(\vec{r},-\omega\right)\times\vec{B}\left(\vec{r},\omega\right)=\frac{\hat{e}_r}{\mu_0}\int\frac{d\omega}{2\pi}\left|\vec{B}\left(\vec{r},\omega\right)\right|^2\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt genutzt haben, dass für eine reellwertige Funktion $B\left(-\omega\right)=\vec{B}^*\left(\omega\right)$. Die zeitlich gemittelte Energie fließt also wiederum radial und wir können die zeitlich integrierte Leistung ausdrücken über

$$\int dt\ \frac{dP}{d\Omega}=\int dt\ \left(\vec{r}\cdot\vec{S}\right)r=\frac{\mu_0}{2\pi}\int d\omega\ r^2\left|\vec{B}\left(\vec{r},\omega\right)^2\right|\equiv\int \mathrm{d}\omega\ \frac{d^2P}{d\omega d\Omega}$$

womit wir den spektralen (frequenzabhängigen) Energiefluss pro Raumwinkel definiert haben. Die Frequenzabhängigkeit schaut danach, welche Frequenzkomponente den Beitrag zum zeitgemittelten (also niederfrequenten) Energiefluss leistet. Jetzt werten wir unseren Fernfeld-Ausdruck für $\vec{B}$ aus

$$\left|\vec{B}\right|^2=\frac{\omega^2}{c^2r^2}\left|\hat{e}_r\times\vec{j}\right|^2=\frac{\omega^2}{c^2r^2}\left|\vec{j}^2-c^2\rho^2\right|$$

wobei wir am Ende wieder die Kontinuitätsgleichung benutzt haben. Damit ergibt sich

$$\frac{d^2P}{d\omega d\Omega}=\frac{\mu_0\omega^2}{2\pi c^2}\left|\hat{e}_r\times\vec{j}\right|^2=\frac{\mu_0\omega^2}{2\pi c^2}\left|\vec{j}^2-c^2\rho^2\right|.$$

Hier sind $\vec{j}(\vec{k},\omega)$ und $\rho\left(\vec{k},\omega\right)$ gemeint, also wieder die Frequenz- und richtungsselektierten Fourierkomponenten. Für impulsive Vorgänge, also z.B. Strahlung bei Kollisionen geladener Teilchen, ist eine Darstellung nützlich, die die Zeit wiederum enthält. Dazu nutzen wir

$$\left|\vec{j}\left(\vec{k},\omega\right)\right|^2=\int dtdt'\ e^{-i\omega\left(t-t'\right)}\vec{j}\left(\vec{k},t\right)\vec{j}^*\left(\vec{k},t'\right)=\int dTd\tau\ e^{-i\omega\tau}\vec{j}\left(\vec{k},T+\frac{\tau}{2}\right)\vec{j}^*\left(\vec{k},T-\frac{\tau}{2}\right).$$

Wir sehen also eine Zeitabhängigkeit vom Zeitschwerpunkt und eine zugeordnete Frequenz $\omega$ im Sinne einer "Wavelet"-Darstellung

$$\frac{d^2P}{d\omega d\Omega} \equiv \int dT \ \frac{d^2P(T)}{d\omega d\Omega}.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\frac{d^2P\,(T)}{d\omega d\Omega} = \frac{\mu_0\omega^2}{2\pi c^2} \int d\tau \ e^{-i\omega\tau} \left[\vec{j}^* \left(\vec{k}, T + \frac{\tau}{2}\right) \vec{j} \left(\vec{k}, T - \frac{\tau}{2}\right) - c^2 \rho \left(\vec{k}, T + \frac{\tau}{2}\right) \rho \left(\vec{k}, T - \frac{\tau}{2}\right)\right]$$

## 8.3 Tscherenkoff-Strahlung

Wir haben in der relativistischen Kinematik gelernt, dass die Grenzgeschwindigkeit für die Bewegung von Teilchen die Lichtgeschwindigkeit $c$ ist. In manchen Medien ist die Lichtgeschwindigkeit aber geringer $c_n < c$ und es ist möglich, dass Teilchen sich mit einer Geschwindkgeit $c_n < v < c$ bewegen. Dies tritt z.B. beim Eintritt von Teilchen aus Beschleunigeranlagen in ihre Detektoren auf. Wir werden sehen, dass in diesem Fall selbst gleichförmig bewegte Ladung strahlt. Wir setzen

$$\rho = q\delta^3\left(\vec{r} - \vec{v}t\right) \quad \vec{j} = q\vec{v}\delta^3\left(\vec{r} - \vec{v}t\right).$$

Wir führen zuerst die räumliche Fouriertransformation aus

$$\int d^3r \ e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \rho\left(\vec{r}, T \pm \frac{\tau}{2}\right) = q e^{i\vec{k}\cdot\vec{v}T} e^{\pm i\vec{k}\cdot\vec{v}\tau/2}$$

sowie ein analoger Ausdruck für $\vec{j}$.Wir erinnern und daran, dass$\vec{k} = \omega\hat{e}_r/c$ ist und führen den Winkel $\theta$ zwischen dem Beobachter und der Geschwindigkeit des Teilchens ein, $\cos\theta = \hat{e}_r \cdot \vec{v}/v$. Dann ist

$$\frac{d^2P}{d\omega d\Omega} = \frac{\mu_0\omega^2 q^2}{2\pi c^2} \int d\tau \ e^{-i\omega\tau} \left(v^2 - c^2\right) e^{i\omega\tau(v/c)\cos\theta} = \mu_0\omega q^2 \left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right) \delta\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right).$$

Wir sehen also, dass dieser Ausdruck für $v < c$ tatsächlich verschwindet da das Argument des Dirac-Delta nicht null werden kann. Für $v > c$ wird Strahlung unter einem scharf definierten Winkel $\theta = \cos^{-1} v/c$ emittiert. Beobachtung der emittierten Strahlung kann also zur Geschwindigkeitsmessung benutzt werden. In Raumschiff Enterprise strahlen die Raumschiffe als der Föderation leicht blau - die Erfinder dieser Serie konnten Elektrodynamik und deuten so die hohe Geschwindigkeit an.

## 8.4 Bremsstrahlung

Hier geht es um die direkte Manifestation der Aussage, dass beschleunigte Ladungen strahlen. Im Englischen heißt dieses Phänomen 'Bremsstrahlung radiation', eine redundante Übersetzung, die redundant ist. Ganz so einfach ist es aber nicht: Wir starten erst einmal mit einem linear beschleunigten Teilchen

$$\vec{r}\,(t) = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \quad \vec{v}\,(t) = \vec{a}t.$$

Die Fouriertransformierte des Stroms ist

$$\vec{\tilde{j}}\left(\vec{k},t\right) = q\vec{a}t\int d^3r\ e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\delta^3\left(\vec{r}-\frac{\vec{a}t^2}{2}\right) = q\vec{a}t\exp\left(i\frac{\vec{k}\cdot\vec{a}t^2}{2}\right)$$

Dies ergibt für das abgestrahlte Spektrum

$$\begin{aligned}\frac{d^2P}{d\omega d\Omega} &= \frac{\mu_0\omega^2}{2\pi c^2}\int d\tau\ e^{-i\omega\tau}q^2\left(\hat{e}_r\times\vec{a}\right)^2\left(T^2-\frac{\tau^2}{4}\right)e^{i\vec{k}\cdot\vec{a}T\tau} \\ &= \frac{\mu_0\omega}{2\pi c^2}q^2a^2\sin^2\theta\left[T^2\delta\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)+\frac{1}{4}\delta''\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)\right]\end{aligned}$$

Hier ist $\theta$ der zwischen der Bewegungsrichtung und der Beobachtungsrichtung eingeschlossene Winkel und $\delta''$ ist die zweite Ableitung des Dirac-Deltas - diese Ableitungen machen unter der Integration Sinn (Übung). Es scheint also so zu sein, dass linear beschleuntigte Ladung nicht strahlt! Hier müssen wir aber aufpassen, denn unser Ausdruck ist für $\omega = 0$ nicht gültig (bzw. er divergiert aufgrund des zweiten Terms) - außerdem haben wir angenommen, dass der Beschleunigungsvorgang unendlich lange läuft, was schon aufgrund der speziellen Relativitätstheorie unphysikalisch ist. Stattdessen betrachten wir einen Beschleunigungsvorgang endlicher Zeit $t_f$ beginnend bei Geschwindigkeit $\vec{v}\,(t=0)$. Wenn die Endgeschwindigkeit nicht im relativistischen Bereich liegt, können wir zeigen, dass

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0q^2}{6\pi c}\left|\dot{\vec{v}}\,(\omega)\right|^2$$

ist. Für unsere endliche Bewegung nutzen wir $\dot{\vec{v}} = -\ddot{\vec{v}}/i\omega$ und berechnen

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{v}}\,(\omega) &= \int dt\ e^{i\omega t}\ddot{\vec{v}}\,(t) = \vec{a}\int dt\ e^{i\omega t}\left[\delta\left(t\right)-\delta\left(t-T\right)\right] \\ &= -2i\vec{a}e^{i\omega T/2}\sin\frac{\omega T}{2}.\end{aligned}$$

Also haben wir für die Energie

$$\frac{dP}{d\omega} = \frac{2a^2T^2}{3}\frac{e^2}{\pi c^3}\left(\frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}\right)^2.$$

Es ist also gegeben durch eine Sinc-Funktion deren Breite durch die Länge des Beschleunigungsvorgangs gegeben wird.

Der eigentlich relevante Fall für die Bremsstrahlung ist die abrupte Änderung der Bewegung (wegen der Bremsstrahlung eigentlich Kurvenstrahlung heißen müsste) von $\vec{v}_2$ nach $\vec{v}_1$ wobei die Streuung zur Zeit $t = 0$ am Ursprung passieren soll. Wir haben also

$$\begin{aligned} \rho &= q\delta^3\left(\vec{r} - \vec{v}_2 t\right) \quad \vec{j} = q\vec{v}_2\delta^3\left(\vec{r} - \vec{v}_2 t\right) \quad t < 0 \\ \rho &= q\delta^3\left(\vec{r} - \vec{v}_1 t\right) \quad \vec{j} = q\vec{v}_1\delta^3\left(\vec{r} - \vec{v}_1 t\right) \quad t > 0. \end{aligned}$$

Hier ergibt die Fouriertransformation des Stromes

$$\vec{j}\left(\vec{k}, \omega\right) = q\vec{v}_2 \int_{-\infty}^{0} dt\ e^{i\omega t(1-\hat{e}_r\cdot\vec{v}_2/c)} + q\vec{v}_1 \int_{0}^{\infty} dt\ e^{i\omega t(1-\hat{e}_r\cdot\vec{v}_1/c)}.$$

Diese Integrale müssen wir wieder durch einen kleinen Imaginärteil an der Frequenz regularisieren - dies bedeutet, dass wir die Abhängigkeit von der fernen Zukunft und Vergangenheit ausblenden. Wir finden

$$\vec{j}\left(\vec{k}, \omega\right) = \frac{iq}{\omega}\left(\frac{\vec{v}_1}{1 - \hat{e}_r\cdot\vec{v}_1/c} - \frac{\vec{v}_2}{1 - \hat{e}_r\cdot\vec{v}_2/c}\right).$$

Damit ergibt sich für die spektrale Leistung

$$\frac{d^2P}{d\omega d\Omega} = \frac{\mu_0 q^2}{2\pi c^2}\left|\hat{e}_r \times \left(\frac{\vec{v}_1}{1 - \hat{e}_r\cdot\vec{v}_1/c} - \frac{\vec{v}_2}{1 - \hat{e}_r\cdot\vec{v}_2/c}\right)\right|^2.$$

Was sagt uns dieser Ausdruck? Zunächst einmal sehen wir, dass es rechts keine Frequenzabhängigkeit gibt, die Strahlung ist also weiß. Dies ist ein Artefakt der Näherung, dass die Bewegungsänderung instantan passiert - würde dies eine Zeit $T$ dauern, dann wäre das Spektrum auf $|\omega| \lesssim 1/T$ beschränkt. Im nichtrelativistischen Grenzfall $v_i \ll c$ haben wir

$$\frac{d^2P}{d\omega d\Omega} = \frac{\mu_0 q}{2\pi c^2}\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right)^2 \sin^2\alpha$$

wobei $\alpha$ der Winkel zwischen der Beobachtungsrictung und der Richtung von $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$ ist. Wir sehen also, dass es hier nur um die Geschwindigkeits*änderung* ankommt, konsistent mit der Dipolstrahlung, hier mit $\ddot{\vec{p}} = q\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right)\delta(t)$. Im ultrarelativistischen Limes $v_i \simeq c$ können die Nenner je nach Richtung nahe an eine Divergenz kommen. Aufgrund des Kreuzproduktes im Zähler ist die Richtung maximaler Emission aber nicht parallel zu $\vec{v}_1$ sondern leict davon abweichend - man kann zeigen, dass dies um einen Winkel $\alpha_i \simeq \sqrt{1 - v_i^2/c^2}$ der Fall ist. So kann ultrarelativistische Bremsstrahlung dazu verwendet werden, die Bewegungsrichtung von Teilchen zu analysieren.

## 8.5 Elektromagnetische Wechselwirkung

Wir wollen uns zum Abschluss Phänomene anschauen, für die wir sowohl die Koordinaten der Teilchen als auch die Felder als dynamische Variable behandeln müssen, die also die Herangehensweise der Mechanik mit der der Elektrodynamik vereinigen. Wir nehmen durch $i$ numerierte Punktladungen und haben damit die Wirkung

$$S = -\sum_i m_i c \int ds_i - \frac{1}{c}\int d^4r \ j^\nu A_\nu - \frac{1}{4c\mu_0}\int d^4r \ F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}.$$

Die Felder sollen allein aus den Ladungen entstehen, also

$$A^\nu = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} j^\nu\left(\vec{r}', t - \frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}'|\right).$$

Wenn wir dies in die Wirkung so einsetzen würden, wäre diese ein Mehrfachintegral und nur mit Methoden zu behandeln, die deutlich über unsere Vorlesung herausgehen. Wir können aber wieder die Entwicklung langsamer Ladungen vornehmen

$$j^\nu\left(\vec{r}', t - \frac{R}{c}\right) \simeq j^\nu(\vec{r}', t) - \frac{R}{c}\frac{\partial j^\nu(\vec{r}', t)}{\partial t} + \frac{R^2}{2c^2}\frac{\partial^2 j^\nu(\vec{r}', t)}{\partial t^2}$$

wobei $R = |\vec{r}-\vec{r}'|$ ist. Hier nehmen wir also an, dass sich der Viererstrom nur langsam ändert verglichen mit den typischen Zeitskalen der Strahlung. Jetzt setzen wir zunächst in die Skalarkomponente ein. Der Term erster Ordnung ist gerade die Zeitliche Änderung der Gesamtladung, verschwindet also, und wir haben

$$\phi(\vec{r}, t) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\int d^3r' \ \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \frac{1}{c^2}\int d^3r' \ \rho(\vec{r}', t')|\vec{r}-\vec{r}'|\right]$$

und haben einen analogen Ausdruck für $\vec{A}$.Für den Fall einer Punktladung erhalten wir insbesondere

$$\begin{aligned}
\phi(\vec{r}, t) &\simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{R} + \frac{q}{2c^2}\ddot{R}\right) \\
\vec{A}(\vec{r}, t) &\simeq \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}}{cR}
\end{aligned}$$

hier ist zu beachten, dass wir die Entwicklung von $\vec{A}$ schon in erster Ordnung abbrechen, da durch die Wechselwirkung in der Wirkung noch einmal ein Faktor $\vec{v}/c$ hereinkommt. Wir führen jetzt eine Eichtransformation mit $\chi = \frac{\mu_0 q}{4\pi}\frac{\dot{R}}{2}$ durch. Damit erhalten wir $\phi' = q/4\pi\epsilon_0 R$ als reines Coulombpotenzial. Zur Umformung von $\vec{A}$ benötigen wir

$$\vec{\nabla}\dot{R} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}|\vec{r}-\vec{r}(t)| = \frac{\partial\hat{n}}{\partial t} \quad \hat{n} = \frac{\vec{R}}{R}.$$

Außerdem ist

$$\dot{R} = \frac{\partial}{\partial t}|\vec{r}-\vec{r}(t)| = -\vec{v}\cdot\hat{n}$$

und

$$R\dot{R} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}R^2 = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{R}^2 = \vec{R}\cdot\dot{\vec{R}} = -\vec{R}\cdot\vec{v}$$

Damit erhalten wir also

$$\dot{\hat{n}} = \frac{1}{R^2}\left(R\dot{\vec{R}} - \dot{R}\vec{R}\right) = \frac{1}{R}\left(-\vec{v} + \hat{n}\left(\hat{n}\cdot\vec{v}\right)\right)$$

was zusammen mit dem ursprünglich schon vorhandenen Term zum Vektorpotenzial

$$\vec{A}' = \frac{q\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{v} + \hat{n}\left(\hat{n}\cdot\vec{v}\right)}{R}.$$

Einsetzen in die Wirkung macht diese zum einfachen Integral über die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L} = \sum_i \left[\frac{m_i\vec{v}_i^2}{2} + \frac{m_i\vec{v}_i^4}{8c^2} - \sum_{j<i}\left(\frac{q_iq_j}{4\pi\epsilon_0 R_{ij}} + \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_iq_j}{R_{ij}}\left\{\vec{v}_i\cdot\vec{v}_j + \left(\vec{v}_i\cdot\hat{n}_{ij}\right)\left(\vec{v}_j\cdot\hat{n}_{ij}\right)\right\}\right)\right].$$

Wir sehen also in dieser Ordnung eine Kombination aus Coulomb- und Dipol-Dipol-Wechselwirkung. Wir sehen dass dies weiterhin eine Zweikörper-Wechselwirkung ist, die jetzt aber auch geschwindigkeitsabhängige Terme enthält. Strahlung spielt in dieser Ordnung noch keine Rolle.

## 8.6 Strahlungsdämpfung

Jetzt wollen wir in die nächste Ordnung in $v/c$ gehen, in der dann endlich Strahlung auftritt. Wir wollen die Situation vereinfachen, indem wir nur ein einziges Teilchen anschauen, das dann mit seinem eigenen elektromagnetischen Feld wechselwirkt. Die nächste Ordnung in der Entwicklung der Zeitabhängigkeit des Viererstroms ist

$$j^{\nu^{(3)}}\left(\vec{r}', t - \frac{R}{c}\right) = -\frac{R^3}{6c^3}\frac{\partial^3 j^\nu}{dt^3}$$

und erhalten in gewohnter Manier in der nächsten Ordnung der Potenziale

$$\phi^{(3)} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{6c^2}\ddot{R} \quad \vec{A}^{(2)} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q}{2}\dot{\vec{v}}.$$

Wir eichtransformieren mit

$$\chi = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{6c^2}\frac{\partial^2 R^2}{\partial t^2}$$

und rechnen dann das Elektrische Feld aus als

$$\vec{E}^{(3)} = \frac{1}{6\pi\epsilon_0}\dddot{\vec{d}}$$

mit dem Dipolmoment $\vec{d} = q\vec{r}$. Welche Arbeit wird hier verrichtet?

$$W = \vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \dddot{\vec{d}} \cdot \dot{\vec{d}} = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{d}{dt} \left[ \dot{\vec{d}} \cdot \ddot{\vec{d}} - \ddot{\vec{d}}^2 \right].$$

Der erste Term ist eine totale Zeitableitung und verschwindet i.A. im zeitlichen Mittel, der letzte hingegen nicht und es ist

$$\langle W \rangle = -\frac{1}{6\pi\epsilon_0} \left\langle \ddot{\vec{d}}^2 \right\rangle$$

was bis auf das Vorzeichen identisch ist zur totalen Ausstrahlung $\langle P \rangle$ eines oszillierenden Dipols. Die entsprechende Kraft heißt Abraham-Lorentz Kraft und das zugrundeliegende Phänomen Strahlungsdämpfung - das eigene Feld einer bewegten Ladung bremst deren Bewegung. Zu beachten ist: Wenn das Teilchen keine äußere Kraft erfährt, sondern nur ihrer Strahlungsdämpfung ausgesetzt ist, dann ist

$$m\dot{\vec{v}} = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{c^3} \ddot{\vec{v}}.$$

Neben der trivialen Lösung $\vec{v} = \text{const.}$ hat diese Gleichung auch eine exponenziell ansteigende Lösung mit

$$\vec{a} \propto \exp\left( \frac{6\pi\epsilon_0 c^2}{q^2} t \right)$$

das heißt dass sich eine kleine Anfangsbeschleunigung schnell aufschaukelt. Das ist unphysikalisch und zeigt uns letzlich, dass die Annahme von Punktladungen inkonsistent ist - die Definition eines minimalen Ladungsradius löst dieses Problem.