

Entwurf: Skript für die TP II

Frank K. Wilhelm-Mauch

24. Oktober 2013

FR Theoretische Physik, Universität des Saarlandes

Inhaltsverzeichnis

1	Vorbemerkungen, mathematisch und strukturell	5
1.1	Felder als Observable	5
1.1.1	Der Gradient	6
1.1.2	Die Divergenz	7
1.1.3	Die Rotation	7
1.2	Ladungs- und Stromdichte	8
1.3	Die Maxwellgleichungen	8
1.4	Erhaltungssätze	9
1.5	Potenziale	12
2	Elektrostatik	16
2.1	Problemstellung	16
2.2	Rotationssymmetrische Aufgaben	17
2.3	Zylindersymmetrische Ladungsverteilung	19
2.4	Allgemeine Lösung mittels Greenscher Funktion	20
2.4.1	Lineare Probleme und Greensche Funktionen	20
2.4.2	Greensche Funktion für die Poissongleichung mit einfachen Randbedingungen	21
2.4.3	Einfache Anwendung der Greensfunktionslösung	22
2.5	Multipolentwicklung	23
2.5.1	Multipolentwicklung in kartesischen Koordinaten	23
2.5.2	Kugelflächenfunktionen	25
2.5.3	Multipolentwicklung in Kugelkoordinaten	30
2.5.4	Beispiel: Doppelhalbkugelschale	32
2.6	Randwertprobleme der Elektrostatik	33
2.6.1	Greensche Identität	34
2.6.2	Darstellung der Lösung des Randwertproblems	34
2.6.3	Beispiel: Dirichletproblem außerhalb einer Kugelschale	35
2.6.4	Interpretation als Spiegelladung	36
3	Magnetostatik	37
3.1	Problemstellung	37
3.2	Langer gerader Draht	37
3.3	Formale Lösung und Biot-Savart-Gesetz	38

3.4	Magnetische Multipole	38
3.4.1	Monopole?	38
3.4.2	Der magnetische Dipol	39

Vorwort

Für die meisten Gebiete von Physik und Chemie ist die elektromagnetische Wechselwirkung die Wichtigste. Sie dominiert den Atombau, die Festkörperphysik, biologische Wechselwirkungen und andere. Elektromagnetismus ist unter anderem die Theorie der Wellenausbreitung, also Licht, alle Arten von Funk und ist damit zentral für Wissenschaft, Technologie, und die Menschliche Existenz als solche. Die Grundlage der Theorie des klassischen (nicht-quantenphysikalischen) Elektromagnetismus wurde im 19. Jahrhundert in Form der Maxwellgleichungen gelegt. Wenn wir uns auch an die zugrundeliegenden Begriffe wie dem des Feldes gewöhnt haben war diese Theorie für die Menschen dieser Zeit ähnlich ungewöhnlich wie die Quantenmechanik im 20. Jahrhundert und wie evtl. die Stringtheorie für uns (falls sie denn stimmt). Die Wirkmächtigkeit dieser Theorie ist nicht zu unterschätzen - letztendlich ist auch die spezielle Relativitätstheorie letztlich ein Korollar der Maxwellgleichungen, was wir in dieser Vorlesung diskutieren werden.

In der TP II nähern wir uns der mathematischen Struktur des Elektromagnetismus und entwickeln leistungsfähige Methoden zur Berechnung elektromagnetischer Felder und Potenziale. Anders als in der Experimentalphysik, in der die Phänomene des Elektromagnetismus schrittweise aufgebaut werden, gehen wir deduktiv vor: Wir nehmen die Maxwellgleichungen als Axiom an und diskutieren ihre Lösungen und die daraus resultierende Physik. Wir benutzen dazu Methoden der Vektoranalysis, die wir mit dieser Vorlesung wiederholen bzw. entwickeln.

Wie in jeder Theorievorlesung ist das Entscheidende im Lernvorgang das Rechnen von Übungsaufgaben. Auch ein Musikinstrument erlernen Sie nur durch Übung, nicht durch Beobachtung. Ein Schlüssel in diesen Aufgaben ist die geschickte Nutzung der Symmetrie - dies ist ein wichtiges Lernziel der TP II bezüglich Ihrer Problemlösungskompetenz.

Es gibt ein Meer an Lehrbüchern zum Elektromagnetismus. Warum dieses Skript? Wir betonen die Ausbreitung von Wellen etwas stärker als statische Modelle. Wir diskutieren die Relativität auf zwei verschiedenen Ebenen, grafisch und formal. Manches aus diesem Skript beruht auf einem älteren, englischsprachigen Skript (Physics 706 - graduate electromagnetism), das ich an der University of Waterloo erstellt habe. Selbstverständlich ist vieles der Lehrbuchliteratur angelegt, insbesondere Jackson, Schwinger, Landau-Lifschitz Bände II und VIII, Fließbach sowie für die Relativitätstheorie Mermin.

Kapitel 1

Vorbemerkungen, mathematisch und strukturell

1.1 Felder als Observable

Sie haben vor dieser Vorlesung wahrscheinlich theoretische Mechanik gelernt. In dieser Theorie in ihrer einfachsten Form werden Massenpunkte mit verallgemeinerten Koordinaten $\{q_i, \dot{q}_i\}$ betrachtet. Wir haben verschiedene Methoden, für diese Koordinaten Bewegungsgleichungen herleiten, die den Newtonschen Bewegungsgleichungen äquivalent sind. Diese sind ein System gewöhnlicher Differenzialgleichungen in denen nach der Zeit differenziert wird (Ableitungen nach Koordinaten tauchen in der Herleitung auf, aber nicht in der Bewegungsgleichung). Die Lösung sind Bahnkurven $\{q_i(t)\}$. Damit ist die Zeit t der *Parameter* der Theorie und die $\{q_i, \dot{q}_i\}$ sind ihre *Observablen*.

In der Elektrodynamik behandeln wir stattdessen die Felder $\vec{E}(\vec{r}, t)$ und $\vec{B}(\vec{r}, t)$, die elektrischen und magnetischen Komponenten des elektromagnetischen Feldes. Wir werden bald auch die Potentiale $\phi(\vec{r}, t)$ und $\vec{A}(\vec{r}, t)$ einführen. Physikalisch bilden \vec{E} und \vec{B} die Observablen der Elektrodynamik. Diese hängen vom Ort \vec{r} und der Zeit t ab, die damit die Parameter sind (zu den Besonderheiten der Tatsache, dass wir eigentlich viel lieber mit den Potentialen arbeiten, kommen wir ebenfalls später). Wir nennen Funktionen wie \vec{E} , \vec{B} und \vec{A} , die $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ abbildet, also vektorwertig ist, *Vektorfelder*. Funktionen wie Φ die $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ abbilden heißen dementsprechend *Skalarfelder*.

Ähnlich wie in der Mechanik müssen wir in der Lage sein, nach unseren Parametern zu differenzieren. Wir schreiben Ableitungen als parziell mit dem Ableitungssymbol ∂ um zu kennzeichnen, dass wir keine weitere Verknüpfung zwischen den Koordinaten benutzen und zwischen ihnen keine Kettenregel anwenden. Parzielle Ableitungen nach der Zeit sind klar, ebenso nach einzelnen Raumkoordinaten x, y, z . Wir fassen diese zusammen im Nabla-Operator, einem

Vektor

$$\vec{\nabla} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Diesen können wir auf verschiedene Art auf Felder anwenden, deren Bedeutung sich in Verknüpfung mit Integralsätzen erschließt.

1.1.1 Der Gradient

Die Anwendung des Nablaoperators auf ein Skalarfeld bildet den Gradienten, ein Vektorfeld

$$\text{grad}\phi \equiv \vec{\nabla}\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Wenn wir die Richtungsableitung entlang eines Einheitsvektor \hat{e} bilden möchte, so ist diese

$$\sum_i e_i \frac{\partial\phi}{\partial r_i} = \hat{e} \cdot \vec{\nabla}\phi.$$

Hier benutzen wir die Konvention, dass wir die drei Komponenten des Ortsvektors

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

als r_i bezeichnen, was das Schreiben von Summen erleichtert. Damit zeigt der Gradient in die Richtung des steilsten Anstiegs und seine Länge ist die Größe dieses steilsten Anstiegs. Insbesondere hat der Gradient ein einfaches Linienintegral. Wenn wir über eine infinitesimale Strecke $d\vec{r} = \hat{e}dr$ integrieren, so ist dieses Integral

$$d\vec{r} \cdot \nabla\phi = dr \left(\hat{e} \cdot \vec{\nabla}\phi \right) = \phi(\vec{r} + d\vec{r}) - \phi(\vec{r}).$$

Wenn wir viele solche Strecken zu einem Weg S zwischen \vec{r}_1 und \vec{r}_2 zusammensetzen, so summieren wir lauter solche Stücke auf. Dabei heben sich alle Zwischenterme in der Form einer Teleskopsumme weg und wir finden

$$\int_S d\vec{r} \cdot \vec{\nabla}\phi = \phi(\vec{r}_2) - \phi(\vec{r}_1).$$

Dieses Ergebnis hängt nur von den Endpunkten ab, nicht davon, wie der Weg S diese verbindet. Auch sind damit Integrale über geschlossene Wege $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$ gleich null.

1.1.2 Die Divergenz

Wir können den Nablaoperator als Skalarprodukt auf ein Vektorfeld \vec{A} anwenden und erhalten die Divergenz

$$\operatorname{div}\vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \sum_i \frac{\partial A_i}{\partial r_i}.$$

Die Divergenz selbst ist ein Skalar. Um Ihre Bedeutung besser zu verstehen, schauen wir uns ein kleines quaderförmiges Volumen an mit einer Ecke bei \vec{r} und der anderen bei $\vec{r} + d\vec{r}$ liegt. Wir betrachten den Fluss von \vec{A} durch eine der Deckflächen und wollen den Fluss aus dem Volumen heraus als positiv bewerten. Wir beginnen bei der Fläche mit \vec{r} als eine der Ecken, die parallel zur yz Ebene ist. Der Fluss durch diese Fläche ist $-\vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{e}_x dydz = -A_x(\vec{r}) dydz$ wobei wir den Einheitsvektor in x -Richtung \hat{e}_x eingeführt haben. Der Fluss durch die gegenüberliegende Seitenfläche ist

$$A_x(\vec{r} + \hat{e}_x dx) dydz = A_x(\vec{r}) dydz + \frac{\partial A_x}{\partial x} dx dydz.$$

Der erste Term hebt sich mit der anderen Fläche heraus. Wenn wir dieses Argument für die anderen Richtungen wiederholen finden wir für die gesamte Flussänderung

$$d\text{Fluss} = \sum_i \frac{\partial A_i}{\partial r_i} dx dy dz = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dV.$$

Damit bezeichnet die Divergenz den Fluss aus einem infinitesimalen Volumen, misst also, wieviele Feldlinien anfangen (positiv) oder enden (negativ).

Auch hier können wir wieder ein größeres Volumen V aus solchen Volumenelementen zusammensetzen. Der Fluss aus Volumenelementen, die eine Fläche teilen, hebt sich gegenseitig heraus, wiederum im Stil einer Teleskopsumme, so dass nur der Fluss durch die äußere Oberfläche, die Oberfläche ∂V von V übrigbleibt. Wir erhalten

$$\int_{\partial V} d^2r (\hat{n} \cdot \vec{A}) = \int_V d^3r \vec{\nabla} \cdot \vec{A}. \quad (1.1)$$

Hier ist \hat{n} der normierte Normalenvektor auf ∂V . Dieses Ergebnis ist der Gaußsche Integralsatz.

1.1.3 Die Rotation

Wir können den Vektor $\vec{\nabla}$ auch in Form eines Vektorproduktes auf ein Vektorfeld \vec{A} anwenden. Dies ist die Rotation

$$\operatorname{rot}\vec{A} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Damit entsteht wieder ein Vektor. Auch dieser kann wieder durch geeignete Integration diskutiert werden. Wir wählen ein kleines Quadrat mit Stützpunkt \vec{r} und legen es parallel zur xy -Ebene. Wir schauen jetzt die in diesem Quadrat liegende Wirbelstärke aus, indem wir ein Wegintegral über \vec{A} einmal um die Fläche herum legen. Das Wirbel-Integral entlang dieses infinitesimalen Weges ∂S ist

$$d\text{Wirbel} = \frac{1}{2} \left[\left(\vec{A}(\vec{r}) + \vec{A}(\vec{r} + d\vec{x}) \right) d\vec{x} + \left(\vec{A}(\vec{r} + d\vec{x}) + \vec{A}(\vec{r} + d\vec{x} + d\vec{y}) \right) d\vec{y} - \left(\vec{A}(\vec{r} + d\vec{x} + d\vec{y}) + \vec{A}(\vec{r} + d\vec{y}) \right) d\vec{x} - \left(\vec{A}(\vec{r}) + \vec{A}(\vec{r} + d\vec{y}) \right) d\vec{y} \right]$$

wobei wir als Kurznotation $d\vec{x} = \hat{e}_x dx$ benutzt haben. Wir nutzen dies und entwickeln außerdem \vec{A} in erste Ordnung des Differenzials. Wir erhalten

$$d\text{Wirbel} = \left(-\frac{\partial A_x}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial x} \right) dx dy = \left(\vec{\nabla} \times \vec{A} \right) \cdot \hat{e}_z d^2 r.$$

Das heißt, die Rotation misst die lokale Wirbelstärke. Auch hier können wir wieder über viele Flächenelemente integrieren, die Zwischenpunkte heben sich heraus und wir finden mit einer Fläche F

$$\oint_{\partial F} d\vec{r} \cdot \vec{A} = \int_F d^2 r \hat{n} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{A} \right).$$

Dies ist der Integralsatz von Stokes.

1.2 Ladungs- und Stromdichte

Elektromagnetische Felder werden von elektrischen Ladungen und Strömen produziert. Die Ladungsdichte $\rho(\vec{r}, t)$ haftet Materie an. Wenn die Materie nun fließt, und wir an für die Bewegung dieser Materie ein Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{r}, t)$ bestimmen können, dann folgt daraus die Stromdichte $\vec{j}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t)$. Wenn die Ladung an Punktteilchen q_i mit Koordinaten \vec{r}_i haftet ist damit

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}, t) &= \sum_i q_i \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_i(t)) \\ \vec{j}(\vec{r}, t) &= \sum_i q_i \dot{\vec{r}}_i \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_i(t)). \end{aligned}$$

1.3 Die Maxwellgleichungen

Jetzt können wir die Maxwellgleichungen hinschreiben. Die erste ist das Coulombsche Gesetz

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0. \quad (1.2)$$

Es sagt also, dass die Ladungen die Quellen des elektrischen Feldes sind. ϵ_0 ist eine dem SI-Einheitensystem geschuldete Konstante. Oft wird in der theoretischen Elektrodynamik das cgs-System verwendet, das an einigen Stellen einfachere Gleichungen liefert. Wir tun das aber nicht. Die zweite sagt, dass die Feldlinien des magnetischen Feldes alle geschlossen sind

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (1.3)$$

Die nächste ist das Faraday'sche Induktionsgesetz

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \quad (1.4)$$

Es besagt, dass zeitlich veränderliche Magnetfelder zu Wirbeln des elektrischen Feldes führen. Schließlich haben wir das Amperesche Gesetz

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right). \quad (1.5)$$

Es sagt, dass die Wirbel des magnetischen Feldes von Strömen herrühren - einmal von elektrischen Strömen, einmal vom Maxwellschen Verschiebungsstrom. Wir können die Maxwellgleichungen in verschiedene Gruppen aufteilen. Besonders praktisch ist die Zusammenfassung in homogene Maxwellgleichungen, also die, die nur Felder enthalten, Gleichungen (1.3)(1.4) und die inhomogenen, die von Ladungen und Strömen abhängen, (1.2)(1.5). Wir werden uns später die Konsequenzen dieser Aufteilung anschauen. Wir sehen auch, dass die vier Gleichungen linear sind, d.h. es existiert ein Superpositionsprinzip: Wenn \vec{E}_1 und \vec{B}_1 die Gleichungen für gegebenes ρ_1 und \vec{j}_1 lösen, und \vec{E}_2 und \vec{B}_2 die Gleichungen für gegebenes ρ_2 und \vec{j}_2 , dann lösen $\vec{E}_1 + \vec{E}_2$ und $\vec{B}_1 + \vec{B}_2$ die Gleichungen für gegebenes $\rho_1 + \rho_2$ und $\vec{j}_1 + \vec{j}_2$.

1.4 Erhaltungssätze

In der Mechanik haben wir die besondere Bedeutung von Erhaltungssätzen für das Verständnis von Bewegungen und die Lösung von Bewegungsgleichungen kennengelernt. Dort hatten die, für eine gegebene Observable $A(\{q_i, \dot{q}_i\}, t)$ die Form

$$\frac{dA}{dt} = \sum_i \left(\dot{q}_i \frac{\partial A}{\partial q_i} + \ddot{q}_i \frac{\partial A}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial A}{\partial t} = 0.$$

Wir lesen das als: A ändert sich entlang der Bewegung, die durch die Lösung der Bewegungsgleichung vorgegeben ist, nicht. Wir nehmen also die Struktur der Bewegungsgleichung mit, wenn wir einen Erhaltungssatz nachweisen. Auch sehen wir, dass der Erhaltungssatz eine Ableitung der Größe nach dem Parameter der Theorie, der Zeit, beinhaltet.

In der Elektrodynamik wollen wir eine ähnliche Aussage treffen, allerdings unter den Gegebenheiten eines Feldes. Dies geschieht in der Form eines *lokalen*

Erhaltungssatzes : Zu einer Observablen A geben wir eine lokale Dichte ρ_A an. Eine Größe ist dann erhalten, wenn die einzige Möglichkeit einer zeitlichen Änderung von $\rho_A(\vec{r}, t)$ ist, dass ein Strom von A geschrieben als \vec{j}_A in ein infinitesimales Volumen um den Punkt \vec{r} herum fließt. Wie wir gerade gelernt haben, drückt die Divergenz den Strom *aus* dem Volumen aus und wir schreiben den Erhaltungssatz von A als

$$\dot{\rho}_A + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_A = 0. \quad (1.6)$$

Nach dieser Konstruktion können wir das auch interpretieren, dass A fließt oder sich lokal aufstaut, aber nirgends produziert oder geschluckt wird, also keine Quellen und Senken besitzt. Darum nennen wir Gleichungen vom Typ 1.6 auch *Kontinuitätsgleichung*.

Diese Kontinuitätsgleichung hat als Konsequenz auch *globale Erhaltungssätze*. Sei V ein Volumen das groß genug ist, dass keine Ströme \vec{j}_A durch seine Oberfläche fließen. Dann ist

$$\frac{d}{dt} A_V \equiv \frac{d}{dt} \int_V d^3r \rho_A(\vec{r}, t) = 0$$

also ist A_V erhalten.

Ein Beispiel ist die Ladungserhaltung. In diesem Fall haben ρ und \vec{j} keinen weiteren Index. Wir können rechnen mittels des Ampereschen Gesetzes.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) - \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (1.7)$$

Zur Behandlung des ersten Terms nutzen wir eine Nablaidentität (diese sind für die Elektrodynamik ausgesprochen typisch). Es ist nämlich für beliebiges \vec{B}

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} = \sum_i \partial_i \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} \partial_j B_k = 0. \quad (1.8)$$

Die letzte Identität ergibt sich daraus, dass für die Differentiationsreihenfolge bei $\partial_i \partial_j$ irrelevant ist, d.h. wenn wir $i \leftrightarrow j$ tauschen und $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}$ berücksichtigen, heben sich diese Termpaare weg. Den zweiten Term in Gl. 1.7 formen wir mit der Maxwellgleichung 1.2 um und erhalten so

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\epsilon_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\dot{\rho}$$

und damit die gewünschte Kontinuitätsgleichung.

Manche Größen sind zwar in dem kombinierten System aus Feldern und Ladungen erhalten, aber nicht in den Feldern alleine, sprich, sie können hin- und her fließen. Wenn wir die Leistungsdichte (Energie/(Zeit mal Volumen)) f nennen, wobei positive Werte für die Erzeugung von Energie stehen, dann wird die erweiterte Kontinuitätsgleichung

$$\dot{\rho}_A + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_A = f_A.$$

In einem konkreten Beispiel wollen wir die Energie betrachten. Auf eine Probeladung q wirkt sich nur die elektrische Komponente der Lorentzkraft energieändernd aus. Die zugehörige Leistung ist $f_E = -\vec{j} \cdot \vec{E}$. Hieraus können wir die Energieerhaltung diskutieren, indem wir wiederum mit 1.5 operieren

$$-\vec{j} \cdot \vec{E} = -\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \epsilon_0 \vec{E} \cdot \dot{\vec{E}}.$$

Der letzte Term kann als

$$\frac{d}{dt} \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2$$

geschrieben werden und liefert so einen Beitrag zur Energiedichte. Im letzten Term wenden wir die zyklische Identität des Spatproduktes an, für gewöhnliche Vektoren $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A})$ lautet. Wir müssen dabei aber die Produktregel der Differenziation beachten. Wir schreiben das am besten als

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{B} \times \vec{E}) = \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) - \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}).$$

Damit können wir umformen

$$-\vec{j} \cdot \vec{E} = -\frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{B} \times \vec{E}) + \frac{d}{dt} \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2.$$

Den ersten Term schreiben wir um mit Hilfe des Induktionsgesetzes und wir finden insgesamt

$$-\vec{j} \cdot \vec{E} = \rho_E + \nabla \cdot \vec{S}.$$

Hier haben wir die Energiedichte

$$\rho_E = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2$$

sowie die Energistromdichte, genannt der Poynting-Vektor

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

eingeführt. Beachten Sie hier das Konstruktionsprinzip: Wir haben den Quellterm zerlegt in eine totale Zeitableitung und eine Divergenz, dies gibt uns die physikalischen Größen.

Wir tun jetzt das gleiche mit dem Impuls, einer Vektorgröße. Die Änderung des Impuls heißt Kraft und dementsprechend starten wir von der Dichte der Lorentzkraft aus der wir wie gehabt zunächst mittels der Maxwellgleichungen die Ladungen eliminieren

$$f_{\vec{p}} = -\rho \vec{E} - \vec{j} \times \vec{B} = -\epsilon_0 \vec{E} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) - \epsilon_0 \vec{B} \times \dot{\vec{E}}.$$

Hier können wir wiederum den Poynting-Vektor ins Spiel bringen mittels der Produktregel

$$\frac{d}{dt} (\vec{B} \times \vec{E}) = \dot{\vec{B}} \times \vec{E} + \vec{B} \times \dot{\vec{E}} = -(\vec{\nabla} \times \vec{E}) \times \vec{E} + \vec{B} \times \dot{\vec{E}}$$

und im letzten Schritt noch das Induktionsgesetz. Wir setzen dies ein zusammen mit der nahrhaften (nach 2. Maxwellgleichung) Null $-\frac{1}{\mu_0}\vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})$. Damit finden wir

$$f_{\vec{p}} = \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \vec{S} + \epsilon_0 \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \epsilon_0 \vec{E} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}).$$

Hier ist $c = (\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2}$ die Lichtgeschwindigkeit. Wir haben jetzt schon erfolgreich eine Zeitableitung hingeschrieben, wie führen wir eine Divergenz ein? Hier müssen wir auch im Hinterkopf behalten, dass hier ein Vektor aus Erhaltungssätzen (einer je Impulskomponente) steht. Wir hätten also gerade die Divergenz einer Matrix. Betrachten wir stellvertretend die x-Komponente

$$\begin{aligned} \left[\vec{E} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} - \vec{E} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \right]_x &= E_y (\vec{\nabla} \times \vec{E})_z - E_z (\vec{\nabla} \times \vec{E})_y - E_x \sum_i \partial_i E_i \\ &= E_y \partial_x E_y - E_y \partial_y E_x - E_z \partial_z E_x + E_z \partial_x E_z - \\ &\quad - E_x \sum_i \partial_i E_i \\ &= \partial_x \left(\frac{E_y^2}{2} + \frac{E_z^2}{2} - \frac{E_x^2}{2} \right) - \partial_y (E_x E_y) - \partial_z (E_x E_z) \\ &= -\vec{\nabla} \cdot \left(E_x \vec{E} - \frac{1}{2} \hat{e}_x \vec{E}^2 \right). \end{aligned}$$

Die anderen drei Komponenten können wir analog behandeln und erhalten die Erhaltungsgleichungen für die drei Impulskomponenten

$$-\rho \vec{E} - \vec{j} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \dot{\vec{S}} - \vec{\nabla} \cdot \overleftarrow{T}.$$

Die Matrix

$$T_{ab} = \epsilon_0 \left(E_a E_b - \frac{1}{2} \delta_{ab} \vec{E}^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(B_a B_b - \frac{1}{2} \delta_{ab} \vec{B}^2 \right)$$

die die Komponenten des Stroms der Komponenten des Impulses beschreibt heißt *Maxwellscher Spannungstensor*.

1.5 Potenziale

Schon oben haben wir diskutiert, dass zwei der Maxwellgleichungen homogen sind. Wir führen jetzt eine Darstellung ein, die diese homogenen Gleichungen automatisch erfüllt. Dazu betrachten wir zunächst den Zerlegungssatz, der besagt, dass sich jedes Vektorfeld in ein quellenfreies Wirbelfeld und ein wirbelfreies Quallenfeld zerlegen lässt (Helmholtz-Zerlegung). Dazu betrachten wir ein beliebiges Vektorfeld $\vec{V}(\vec{r})$. Dieses stellen wir als Fourierintegral dar

$$\vec{V}(\vec{r}) = \int d^3k \vec{V}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad \vec{V}(\vec{k}) = \int d^3r \vec{V}(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}. \quad (1.9)$$

Wir zerlegen die Fouriertransformierte in eine longitudinale und eine transversale Komponente $\vec{V}(\vec{k}) = \vec{V}_{\parallel}(\vec{k}) + \vec{V}_{\perp}(\vec{k})$. Diese sind

$$\begin{aligned}\vec{V}_{\parallel}(\vec{k}) &= \vec{k} \frac{\vec{k} \cdot \vec{V}}{k^2} \\ \vec{V}_{\perp}(\vec{k}) &= -\frac{\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{V})}{k^2}.\end{aligned}$$

Nach der Fouriertransformation ist die Fourierdarstellung des Nablaoperators gerade $i\vec{k}$ und so erkennen wir, dass \vec{V}_{\parallel} gerade ein Gradientenfeld ist und \vec{V}_{\perp} eine Rotation. Die Rotation eines Gradienten ist null und die Divergenz einer Rotation auch, was damit das Helmholtz-Theorem beweist. Dies ist nur ein Existenzbeweis der Zerlegung

$$\vec{W}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\psi(\vec{r}) + \vec{\nabla} \times \vec{W}(\vec{r})$$

wir werden später die mathematischen Werkzeuge zu haben, $\psi(\vec{r})$ und $\vec{W}(\vec{r})$ explizit zu konstruieren.

Mit dieser Zerlegung können wir jetzt die Maxwellgleichungen vereinfachen. Wir starten mit der Quellenfreiheit des Magnetfeldes (1.3). Diese ist nach (1.8) automatisch erfüllt, wenn wir \vec{B} als Rotation schreiben, was das Vektorpotenzial \vec{A} definiert

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (1.10)$$

Dies ist nicht eindeutig, aber gut genug. Insbesondere haben wir hier zwei eine skalare Differenzialgleichung für B berücksichtigt, aber trotzdem keine Parameter eliminiert - wir drücken die drei Komponenten von \vec{B} durch die drei Komponenten von \vec{A} aus. Die andere homogene Maxwellgleichung, das Induktionsgesetz (1.4) können wir so schreiben als

$$\vec{\nabla} \times (\vec{E} + \dot{\vec{A}}) = 0.$$

Wir können leicht analog zu (1.8) nachrechnen, dass daraus folgt, dass wir $\vec{E} + \dot{\vec{A}}$ als Gradienten schreiben können. Physikalisch folgt das aus dem Widerspruch zwischen den beim Gradienten diskutierten Wegintegralformel und dem Stokesschen Integralsatz - wenn die Rotation verschwindet muss das Integral wegunabhängig sein, also ein Gradientenfeld. Wir führen das skalare Potenzial ϕ nach Konvention so ein

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \dot{\vec{A}}. \quad (1.11)$$

Auch dies ist nicht eindeutig: Einerseits gibt es Integrationskonstanten, andererseits haben wir auch hier die drei Differenzialgleichungen von (1.4) dazu genutzt, aus drei Komponenten eine zu machen.

Die schon erwähnte Nichteindeutigkeit manifestiert sich folgendermaßen: Da die Rotation eines Gradienten stets verschwindet, können wir für ein beliebiges vernünftiges Skalarfeld $f(\vec{r}, t)$ die Transformation

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f \quad (1.12)$$

ohne dabei das Magnetfeld gemäß (1.10) zu verändern. Um das elektrische Feld Gl. (1.11) nicht zu verändern müssen wir auch transformieren

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \dot{f}.$$

Diese Transformationen heißen *Eichtransformationen*. Sie verdeutlichen dass, auch wenn wir später eher ϕ und \vec{A} ausrechnen (und oftmals Intuition für sie entwickeln können), dies keine Observablen sind. Die Eichtransformation erlaubt es, an \vec{A} und ϕ insgesamt eine weitere Differentialgleichung als Bedingung zu stellen. Dieses Prinzip heißt *Eichfreiheit*. Wir können diese Bedingung fordern ohne jedes mal die Eichfunktion f angeben zu müssen (was i.A. schwierig ist). Wir werden dies nicht in aller Finesse formal beweisen, die Idee aber skizzieren.

Populäre Eichungen sind

- die Coulombeichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ insbesondere vorteilhaft zur Behandlung und Quantisierung der Kopplung nichtrelativistischer Teilchen und das Feld
- die Lorenzeichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (1.13)$$

zur Behandlung von Strahlung und anderen relativistischen Phänomenen

- die Weyleichung $\phi = 0$

Wenn wir z.B. ein gegebenes \vec{A} haben, dann folgt aus der Coulomb-Eichbedingung und der Transformationsgleichung (1.12) dass $\Delta f = -\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$. Zu vorgegebenem \vec{A} ist diese Differentialgleichung für f immer lösbar (wie wir in der Elektrostatik ausführlich behandeln werden).

Mit den Potenzialansätzen (1.10)(1.11) können wir die verbleibenden Maxwellgleichungen umschreiben. Das Coulomb-Gesetz (1.2) wird zu

$$\Delta \phi + \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{A}} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (1.14)$$

Hier entmischen sich Skalar- und Vektorpotenzial wenn die Coulombeichung gewählt ist. Bei der Behandlung des Ampereschen Gesetzes betrachten wir zunächst

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}. \quad (1.15)$$

Diese Identität lässt sich mit dem Entwicklungssatz für den Levi-Civita-Tensor leicht zeigen. Wir können sie und leichter verbal merken als "rotrot gleich graddiv minus divgrad". Aus (1.5) wird so

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \ddot{\vec{A}} - \vec{\nabla} \left(\frac{1}{c^2} \dot{\phi} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) = -\mu_0 \vec{j}. \quad (1.16)$$

Die ersten beiden Terme können wir als $\square \vec{A}$ zusammenfassen, wobei der d'Alembert (Quabla) Operator $\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ der typische Differentialoperator der Wellengleichung ist. Diese Gleichungen (1.14)(1.16) werden in der Lorentz-Eichung Gl. (1.13) symmetrisch und sind respektive

$$\square \phi = -\rho/\epsilon_0 \quad \square \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}.$$

Dies soll uns als strukturelles Rüstzeug genügen - wir werden gegen Ende mehr über die globale Struktur der Maxwellgleichungen lernen, insbesondere ihre Symmetrien, wenn wir entdecken werden, dass sie zur Lorentzinvarianz und speziellen Relativitätstheorie führen. Jetzt wenden wir uns Techniken zu, die Maxwellgleichungen in wichtigen Situationen zu lösen.

Kapitel 2

Elektrostatik

2.1 Problemstellung

In der Elektrostatik interessieren wir uns für rein elektrische Felder, d.h. $\vec{B} = 0$ und $\vec{j} = 0$. Wir interessieren uns für den statischen Fall, d.h. die verbleibenden Variablen ρ und \vec{E} hängen nur vom Ort \vec{r} ab. Elektrostatische Apparate spielen eine große Rolle in physikalischen Aufbauten, aber auch in der Technik z.B. von Bildschirmröhren. Elektrostatische Felder beschreiben in guter Näherung den Atombau und Wechselwirkungen auf molekularer Skala - 'was die Welt, im Innersten zusammenhält'.

In nicht-pathologischen Eichungen ist für die Elektrostatik $\vec{A} = 0$. Die Gleichung für das verbleibende Skalarpotenzial ϕ (1.14) reduziert sich damit zur *Poissongleichung*

$$\Delta\phi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}.$$

Der ladungsfreie Fall $\Delta\phi = 0$ hat mit *Laplacegleichung* einen speziellen Namen. Anders als im eindimensionalen Fall hat auch die Laplacegleichung vielfältige Lösungen. Er ist wichtig, da aufgrund der Linearität der Maxwellgleichungen zu jeder Lösung der Poissongleichung eine Lösung der Laplacegleichung addiert werden kann. Warum würden wir das tun? Nun, die Poissongleichung ist nur dann eindeutig lösbar, wenn wir zusätzlich eine Randbedingung auf einer geschlossenen Fläche angeben. Wir werden später spezielle Randbedingungen kennenlernen. Sie kennen dieses Phänomen aus der klassischen Mechanik - die Lösung ein und derselben Newtonschen Bewegungsgleichung kann sehr verschieden sein, ja nach Anfangsbedingung. Das heißt eine elektrostatische Aufgabe ist nur durch Angabe der vorgegebenen Ladungsverteilung ρ und eine Randbedingung komplett. Wir haben auch eine verbleibende Eichfreiheit: Da die physikalische Observable, das \vec{E} -Feld, eine Ableitung des Potenzials ist, können wir eine additive Konstante frei wählen.

2.2 Rotationssymmetrische Aufgaben

Wir beginnen mit dem Spezialfall, dass die Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ um den Ursprung (den wir geeignet gewählt haben) vollständig rotationssymmetrisch ist und wir außerdem eine rotationssymmetrische Randbedingung setzen. Zur mathematischen Beschreibung wählen wir Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) . In der theoretischen Physik übersetzen sich diese in kartesische Koordinaten (x, y, z) wie folgt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{pmatrix} \quad r > 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi.$$

Der Ortsvektor \vec{r} hat damit automatisch die Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) . Wir können am Ort \vec{r} ein Koordinatendreiein definieren aus

$$\hat{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad \hat{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \quad \hat{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Analog zu den Koordinatenvektoren in kartesischen Koordinaten zeigt \hat{e}_r in die Richtung in der sich nur r verändert und θ und ϕ konstant sind etc. Wir nennen die Richtung von r die *radiale* Richtung, die von \hat{e}_θ *azimuthal* und die von \hat{e}_ϕ *polar*. Die Richtung der Einheitsvektoren ist selbst ortsabhängig und wir erhalten darum gekrümmte Koordinatenlinien - Längen- und Breitenkreise. Wir können ein Vektorfeld darum schreiben wie $\vec{E}(r, \theta, \phi) = E_r(r, \theta, \phi) \hat{e}_r + E_\theta(r, \theta, \phi) \hat{e}_\theta + E_\phi(r, \theta, \phi) \hat{e}_\phi$.

In der kugelsymmetrischen Situation gehen wir direkt über die Maxwellgleichung (1.14). Dazu benötigen wir eine Darstellung der Divergenz in Kugelkoordinaten. Anwendung der Kettenregel und der Substitutionsregeln gibt

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta E_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi}. \quad (2.1)$$

Wir können dies auf ein eindimensionales Problem reduzieren. \vec{E} kann nur von r abhängen (da weder die Randbedingung noch die Ladungsverteilung diese Symmetrie brechen). Wir sehen leicht, dass dies erzwingt, dass das Feld in rein radiale Richtung zeigt, $\vec{E}(r) = E(r) \hat{e}_r$. Die Kombination aus (1.2)(2.1) ergibt

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) = \frac{r^2}{\epsilon_0} \rho(r).$$

Wir können diese Gleichung leicht integrieren zu

$$E_r(r) = \frac{1}{r^2 \epsilon_0} \int_0^r dr' r'^2 \rho(r'). \quad (2.2)$$

Dieses Ergebnis kann auf eine physikalisch transparentere Art und Weise hergeleitet werden, die auch die Interpretation bestimmt. Wir starten von der Divergenz in der Maxwellgleichung (1.2) und wenden auf sie den Satz von Gauß

(1.1) an, wobei wir als Integrationsvolumen eine Kugel vom Radius r um den Ursprung wählen

$$\int_{r'=r} d^3r' E_r = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{r'<r} d^3r' \rho(r'). \quad (2.3)$$

Das Integral auf der rechten Seite hat eine einfache Interpretation, es handelt sich um die von der Kugel eingeschlossene Ladung $Q(r)$. Aufgrund der Kugelsymmetrie können wir sie vereinfachen mittels

$$Q(r) = \int_{r'<r} d^3r' \rho(r') = \int_0^r dr' r'^2 \int_{-1}^1 d \cos \theta \int_0^{2\pi} d\phi \rho(r').$$

Die Substitution in Kugelkoordinaten, die wir hier durchgeführt haben, lässt sich leicht aus deren Definition herleiten. Jetzt bringen wir die Rotationssymmetrie ins Spiel und berechnen

$$Q(r) = 4\pi \int_0^r dr' r'^2 \rho(r'). \quad (2.4)$$

Andererseits können wir uns jetzt an die linke Seite von Gl. (2.3) machen. Da $E(r)$ nicht von den Winkeln abhängt, können wir es aus dem Integral herausziehen, das Integral reduziert sich zur Oberfläche und wir finden

$$E_r(r) = \frac{Q(r)}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (2.5)$$

Dies ist das Coulombgesetz, und es ist offensichtlich äquivalent zu Gl. (2.2) via Gl. (2.4).

Als Beispiel betrachten wir die homogen geladene Kugel vom Radius R mit Gesamtladung Q . Die Ladungsdichte ist damit

$$\rho(r) = \frac{3Q}{4\pi R^3} \Theta(R-r)$$

wobei Θ die Heavisidesche Stufenfunktion ist

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 1/2 & x = 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Hier ist der Wert bei $x = 0$ meist nicht relevant, solange er endlich ist. Wir berechnen zunächst für $r < R$

$$Q(r) = 4\pi \int_0^r dr' r'^2 \rho(r') = \frac{3Q}{R^3} \left. \frac{r'^3}{3} \right|_0^r = Q \frac{r^3}{R^3}.$$

Damit haben aus Gleichung (2.5)

$$E_r(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \frac{r}{R^3} & r < R \\ \frac{1}{r^2} & r > R \end{cases}$$

Hieraus können wir auch das elektrische Potenzial ausrechnen, anhand des Gradienten in Polarkoordinaten $E_r(r) = -\partial_r \phi(r)$. Typischerweise wählen wir $\phi(r \rightarrow \infty) = 0$ und können integrieren

$$\phi(r) = - \int_r^\infty dr' E_r(r').$$

Für $r > R$ haben wir

$$\phi(r) = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_r^\infty \frac{dr'}{r'^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (2.6)$$

und innerhalb der Kugel $r < R$

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \int_r^R dr' r' + \phi(R) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^3} (R^2 - r^2) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}.$$

Besonders interessant ist der Fall einer Punktladung, d.h. die (endliche) Ladung Q ist konzentriert im Radius $R = 0$. Die Ladungsverteilung kann mit dem Diracdelta geschrieben werden als $\rho(\vec{r}) = Q\delta^3(\vec{r})$. Hier gilt das Coulombpotential (2.6) überall.

2.3 Zylindersymmetrische Ladungsverteilung

Analog zur Vorgehensweise im kugelsymmetrischen Fall, können wir den Gaußschen Satz auch auf streng zylindersymmetrische Ladungsverteilungen anwenden. Die Zylinderkoordinaten (r, ϕ, z) ¹ hängen mit den kartesischen Koordinaten via $x = r \cos \phi$ und $y = r \sin \phi$ zusammen. Zylindersymmetrie bedeutet hier, dass $\rho = \rho(r)$ ist also insbesondere nicht von z abhängt. Dies bedeutet, dass die Ladungsverteilung in z -Richtung unendlich ausgedehnt sein muss. Wir definieren hier $q(r)$ als die Ladung pro Länge, die in einem Zylinder der Länge r eingeschlossen ist. Dann ist mit Argumenten analog zu denen oben das elektrische Feld nur mit einer Komponente in radialer Richtung ausgestattet

$$\vec{E} = \frac{q(r)}{2\pi r} \hat{e}_\rho \quad \hat{e}_\rho = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

und das Potenzial mit dem für diese Symmetrie typischen logarithmischen Potenzial für den Fall einer Linienladung

$$\phi(r) = \frac{q}{2\pi} \log \frac{r}{r_0}. \quad (2.7)$$

Details als Übungsaufgabe.

¹oftmals wird ρ statt r verwendet, was hier aber mit der Ladungsdichte verwechselt werden könnte

2.4 Allgemeine Lösung mittels Greenscher Funktion

2.4.1 Lineare Probleme und Greensche Funktionen

Wir beginnen zunächst mit der Betrachtung linearer Gleichungssysteme für einen (i.A. n -dimensionalen) Vektor \mathbf{x} . Für eine gegebene Inhomogenität können diese geschrieben werden als $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}$. Dieses können wir mit verschiedenen Methoden lösen, z.B. mittels Gauß-Elimination. Wenn die Aufgabe besonders wichtig ist und wir viele Inhomogenitäten studieren wollen, dann invertieren wir zuerst die Matrix, d.h. wir finden \mathbf{A}^{-1} so, dass $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$. Wenn wir dies haben, dann können wir die Lösung zum ursprünglichen linearen Gleichungssystem reduzieren auf $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{y}$. Letzteres können wir leicht beweisen indem wir nachrechnen $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y}$.

Die Eigenschaft, die wir hier eingesetzt haben, ist im Wesentlichen die Linearität der Gleichung. Da die Maxwellgleichungen auch linear sind, möchten wir diese Technik hier nutzen. Allerdings sind dies keine linearen algebraischen Gleichungen, sondern Differenzialgleichungen. Die "Vektoren" sind Funktionen und statt natürlicher Zahlen als Index müssen wir reelle Zahlen q (bzw. Tupel reeller Zahlen) als Index akzeptieren. Die Matrix \mathbf{A} wird ersetzt durch den (beliebigen) Differenzialoperator \mathbf{D}_q sowie eine Randbedingung. Wir stellen jetzt die Gleichungen aus dem algebraischen Problem - nicht in Matrix-, sondern in Koeffizientenschreibweise - mit den Differenzialversionen gegenüber. Wir möchten gerne lösen

$$\sum_i A_{ji} x_i = y_j \quad \mathbf{D}_q f(q) = g(q). \quad (2.8)$$

Die Inverse des linearen Operators nennen wir hier $G(q, q')$. Die Bestimmungsgleichung ist

$$\sum_i A_{ji} A_{ik}^{-1} = \delta_{jk} \quad \mathbf{D}_q G(q, q') = \delta(q - q') + \text{Randbedingungen}. \quad (2.9)$$

Hier haben wir für den Fall von Matrizen das Kroneckerdelta und für die Differenzialgleichung das Diracdelta eingeführt. Wenn wir G gefunden haben, können wir die ursprüngliche Differenzialgleichung für jede Inhomogenität $g(q)$ lösen indem wir ausrechnen

$$f(q) = \int dq' G(q, q') g(q').$$

An dieser Stelle sehen wir, dass es wichtig ist, G als 'Matrix' (also als Funktion von zwei Indizes) zu behandeln - was hier steht ist die Anwendung einer Matrix auf einen Vektor. Dies ist auch wichtig wenn wir nachrechnen, dass f tatsächlich Gl. (2.8) löst

$$\begin{aligned} D_q f(q) &= D_q \int dq' G(q, q') g(q') = \int dq' [D_q G(q, q')] g(q') \\ &= \int dq' \delta(q - q') g(q') = g(q). \end{aligned}$$

Das Lösen einer linearen Differenzialgleichung kann also auf die Bestimmung einer Greenschen Funktion zurückgeführt werden - und auf die Berechnung des Integrals über die Inhomogenität. Dies definiert einen klaren Weg, den wir jetzt für die Elektrostatik beschreiten wollen.

2.4.2 Greensche Funktion für die Poissongleichung mit einfachen Randbedingungen

Die recht subtile Diskussion von Randbedingungen in Greensfunktionsproblemen wollen wir zunächst vermeiden, indem wir die Poissongleichung mit einer einfachen Randbedingung im Unendlichen betrachten

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \phi(\vec{r}) = 0. \quad (2.10)$$

Die Bestimmungsgleichung für die Greensche Funktion (2.9) ist in diesem Fall

$$\Delta G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \quad (2.11)$$

Da der Differenzialoperator selbst den Ort \vec{r} nicht explizit enthält und auch die Randbedingung translationsunabhängig ist (verschobenes Unendlich ist immer noch Unendlich) hängt die Greensfunktion nur von der Differenz der Koordinaten $\vec{x} = \vec{r} - \vec{r}'$ ab und wir können umschreiben

$$\Delta G(\vec{x}) = \delta^3(\vec{x}). \quad (2.12)$$

Da die Funktion im unendlichen verschwindet, können die Gleichung Fouriertransformieren zu

$$-k^2 G(\vec{k}) = 1 \Rightarrow G(\vec{k}) = -\frac{1}{k^2}.$$

Diesen berücksichtigend einfachen Ausdruck wollen wir jetzt zurücktransformieren gemäß

$$G(\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \frac{1}{k^2}.$$

Zur Behandlung dieses Integrals führen wir jetzt Kugelkoordinaten im \vec{k} -Raum ein und bestimmen dass θ der Winkel zwischen \vec{k} und \vec{x} ist. Damit haben wir

$$\begin{aligned} G(\vec{x}) &= -\int dk \frac{k^2}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2} \int d\cos\theta e^{ikx \cos\theta} \int d\phi \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int dk \int d\cos\theta e^{ikx \cos\theta} \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int dk \frac{1}{ikx} e^{ikx \cos\theta} \Big|_{\cos\theta=-1}^{\cos\theta=1} = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{\sin kx}{kx}. \end{aligned}$$

Das letzte Integral, das wir ausrechnen müssen, ist das über die sinc-Funktion, die Sie wahrscheinlich aus der Beugung kennen. Es ist $\frac{\pi}{2x}$ (nachschauchen!) und wir finden insgesamt

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (2.13)$$

Dies ist natürlich eine bekannte Funktion - bis auf den Vorfaktor $-q/\epsilon_0$ den wir beim Übergang von (2.10) zu (2.12) unterschlagen haben - das Potenzial von einer Punktladung am Punkt \vec{r}' gemessen am Punkt \vec{r} . Klar, die Bestimmungsgleichung (2.11) ist ja auch die entsprechende Poissongleichung. Damit ist die Lösung des allgemeinen elektrostatischen Problems mit der einfachen Randbedingung, Gl. (2.10)

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (2.14)$$

Wir schreiben also das Potenzial als mit der Ladungsdichte gewichtete Überlagerung von Punktladungen. Mit dem Finden dieser wichtigen Darstellung ist aber unsere Arbeit nicht erledigt, denn die Berechnung des Integrals erfordert im Allgemeinen weitere Näherungsmethoden.

2.4.3 Einfache Anwendung der Greensfunktionslösung

Wir betrachten einen Fall, in dem das Integral (2.14) geschlossen ausgerechnet werden kann: Eine Linienladung bei $x = y = 0$ und $|z| < L$. Die Ladungsdichte ist $\rho(\vec{r}) = \sigma \delta(x) \delta(y) \Theta(L - |z|)$. $\sigma = Q/2L$ ist die Linienladungsdichte. Wir bezeichnen $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ und erhalten aus Gl. (2.14)(2.14)

$$\phi(\vec{r}) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^L \frac{dz'}{\sqrt{R^2 + (z - z')^2}} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{-(L/2+z)/R}^{(L/2-z)/R} \frac{ds}{\sqrt{1 + s^2}}.$$

Hier haben wir $s = (z' - z)/R$ substituiert. Bei der Berechnung komplizierter Integrale durch Nachschlagen empfiehlt es sich immer, zuerst das Integral so einfach wie möglich dimensionslos zu machen. Hier sehen wir z.B. sofort, dass der Abstand des Aufpunkts vom Ende der Linienladung verglichen mit dem Abstand von der Linienladung ein wesentlicher Parameter ist. Wir schlagen nach und finden, dass

$$\phi(\vec{r}) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \left(\sinh^{-1} \frac{L/2 - z}{R} + \sinh^{-1} \frac{L/2 + z}{R} \right).$$

Wir können das im Fall $L \rightarrow \infty$ mit unserer Lösung mittels Gausschem Satz vergleichen. Wir nutzen die Identität $\sinh^{-1} x = \log(x + \sqrt{1 + x^2})$ und finden

$$\phi(\vec{r}) = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \log\left(\frac{L}{R}\right) + \text{const.}$$

in Übereinstimmung mit Gl. (2.7).

2.5 Multipolentwicklung

Abgesehen von Spezialfällen ist das Integral in Gl. (2.14) schwierig zu berechnen. Wir führen darum die Multipolentwicklung als Näherungsmethode ein, die auch eine klare physikalische Interpretation zulässt.

2.5.1 Multipolentwicklung in kartesischen Koordinaten

Wir führen die Entwicklung zunächst in kartesischen Koordinaten durch, die einen besseren Anschluss zur Experimentalphysik erlauben aber schwer in hohe Ordnungen zu bringen sind. Die Crux an Gl. (2.14) ist die räumliche Abhängigkeit des Nenners

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^{-1} = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'}^{-1}.$$

Insbesondere das Skalarprodukt am Ende verdient besondere Aufmerksamkeit. Wir gehen jetzt davon aus, dass wir uns weit weg von der Ladungsverteilung befinden, d.h. außerhalb einer Kugel um den Ursprung mit Radius R ist keine Ladung, $\rho = 0$ und wir berechnen das Feld in einem Aufpunkt \vec{r} mit $r \gg R$. Dies erlaubt es, r'/r als kleinen Parameter zu behandeln. Wir nutzen außerdem die binomische Reihenentwicklung

$$(1+x)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} x^k = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + O(x^3). \quad (2.15)$$

Wir entwickeln also

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^{-1} = \frac{1}{r} \sqrt{1 - 2\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}}^{-1} = \quad (2.16)$$

$$= \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + -\frac{1}{2} \frac{r'^2}{r^2} + \frac{3}{2} \frac{(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2}{r^4} \right) + O\left(\frac{1}{r^4}\right). \quad (2.17)$$

Hier ist zu beachten, dass wir am Ende einmal einen Term aus der ersten Ordnung von (2.15) mit der zweiten Ordnung kombinieren, weil die beide die gleiche Ordnung in $1/r$ haben. Auch gilt es zu beachten, dass jedes \vec{r} im Zähler natürlich mit $O(r)$ zur Gesamtordnung des betreffenden Terms zählt.

Wir diskutieren jetzt diese drei Ordnungen in $1/r$.

Der erste Term in der Klammer nähert $|\vec{r} - \vec{r}'|^{-1} \simeq 1/r$. In dieser Näherung ist dann Gl. (2.14) näherungsweise

$$\phi(\vec{r}) \simeq \phi_0(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad Q = \int d^3r \rho(\vec{r}).$$

Diese Ordnung fällt also wie $1/r$ ab und ist allein durch die Gesamtladung Q gegeben. Das Potenzial ist isotrop. Man nennt dies auch den Monopolbeitrag.

In der nächsten Ordnung erhalten wir eine Korrektur in der nächsten Ordnung von der Form

$$\phi_d(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{d} \cdot \vec{e}_r}{r^2} \quad \vec{d} = \int d^3r \vec{r} \rho(\vec{r}).$$

Der Vektor \vec{d} ist der über die Ladungsverteilung gewichtet gemittelte Ortsvektor und heißt Dipolmoment. Dieser Beitrag zum Potenzial ist anisotrop auf eine einfache Art und Weise - ihr Betrag hängt vom Winkel des Ortsvektors mit dem Dipolvektor ab. Das Dipolmoment hat als Dimension Ladung mal Länge und skaliert mit QR . Der Beitrag fällt schneller ab als die vorherige Ordnung, nämlich wie $O(R/r^2)$. Zur Berechnung des zugehörigen Dipolfeldes berechnen wir exemplarisch

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{p_x r - 3(\vec{p} \cdot \vec{r}) x/r}{r^4}.$$

Damit erhalten wir insgesamt für den Dipolbeitrag zum Feld

$$\vec{E}_d = \frac{3\vec{r}(\vec{p} \cdot \vec{r}) - r^2 \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^5}.$$

Trotz der Schreibweise fällt dieses Feld in $O(R/r^3)$ ab und besteht aus einer radialen Komponente die besonders groß ist, wenn man entlang des Dipolmoments schaut, und einer Komponente parallel zum Dipolmoment.

In der nächsten Ordnung, bestehend aus den letzten beiden Termen von Gl. (2.15) schreiben wir diese Terme zunächst etwas um, nämlich

$$\int d^3 r' \rho(\vec{r}') \left[-\frac{r'^2}{r^2} + 3 \frac{(\vec{r}' \cdot \vec{r})^2}{r^4} \right] = \frac{1}{r^4} \vec{r}^T \cdot \overleftrightarrow{Q} \cdot \vec{r}.$$

Hier haben wir die Quadrupolmatrix \overleftrightarrow{Q} definiert als

$$\overleftrightarrow{Q} = \int d^3 r' \left(3\vec{r}' \cdot \vec{r}'^T - r'^2 \overleftrightarrow{1} \right) \rho(\vec{r}').$$

In dieser kompakten Schreibweise ist zu beachten, dass $\overleftrightarrow{1}$ die dreidimensionale Einheitsmatrix ist und dass es sich bei $\vec{r}' \cdot \vec{r}'^T$ um eine Matrix handelt, das sogenannte dyadische Produkt. Beim Skalarprodukt wäre der erste Faktor transponiert und der zweite nicht. Der Eintrag der Matrix an der Stelle ij ist dann

$$Q_{ij} = \int d^3 r' \left(3r'_i r'_j - \delta_{ij} r'^2 \right) \rho(\vec{r}').$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass $\sum_i Q_{ii} = 0$, die Matrix ist also spurlos. Außerdem ist sie symmetrisch, was die Zahl der unabhängigen Parameter auf 5 legt. Das resultierende Potenzial

$$\phi_Q(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^5} \vec{r}^T \cdot \overleftrightarrow{Q} \cdot \vec{r}$$

fällt ab wie $1/r^3$ und ist wiederum anisotroper als das Dipolpotenzial. Daraus lässt sich entsprechend auch wieder das Feld konstruieren. Die Namen Dipol- und Quadrupolmoment lassen sich anhand von Punkt Di- und Quadrupolen verstehen (Übungsaufgabe) die aus 2 bzw. 4 entgegengesetzten Punktladungen bestehen. Wir sehen, dass mit ansteigender Ordnung das Potenzial immer

schneller abfällt und immer anisotroper wird. Dies lässt sich (Vorlesung!) grafisch leicht verstehen: Je weiter man weg ist, desto mehr gleichen sich Ladungen von unterschiedlichen Orten aus, da der Unterschied in der Entfernung zwischen Aufpunkt und verschiedenen Punkten in der Ladungsverteilung immer unwichtiger wird.

2.5.2 Kugelflächenfunktionen

An der Art der gerade durchgeführten Entwicklung sehen wir, dass es schwierig ist, diese in höhere Ordnung zu treiben. Zum einen wird die Buchhaltung der verschiedenen Terme immer schwieriger, da wir Ordnungen im anisotropen Term mit denen des r'^2 Terms vermischen. Zum anderen bekommen wir dann Tensoren höherer Stufe. Da wir aber schon gesehen haben, dass das auch eine Entwicklung im Grad der Anisotropie der Ladungsverteilung ist, wollen wir eine ähnliche Vorgehensweise jetzt in Kugelkoordinaten anwenden. Wir folgen weitestgehend der sehr vollständigen, wenn auch auf ersten Blick nonchalant wirkenden Darstellung aus Kapitel 20 von Schwinger.

Wir diskutieren zunächst die Zusammenhänge zwischen verschiedenen Lösungen der Laplacegleichung für $r > 0$.

Gradienten von Lösungen Ist $\phi(\vec{r})$ eine Lösung der Laplacegleichung, dann ist $(\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \phi(\vec{r})$ eine Lösung der Laplacegleichung.

Dies ist klar, denn die Anwendung des Laplaceoperators kann mit der Anwendung partieller Ableitungen vertauscht werden, ebenso die Bildung linearer Kombinationen aus diesen partiellen Ableitungen.

Damit können wir per Induktion schließen, dass für beliebige Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_l$ auch

$$\left[(\vec{a}_1 \cdot \vec{\nabla}) \cdots (\vec{a}_l \cdot \vec{\nabla}) \right] \frac{1}{r} \equiv \frac{1}{r^{2l+1}} f_l(\vec{r}) \quad (2.18)$$

eine Lösung der Laplacegleichung für $r > 0$ ist.

Homogenität Das oben definierte $f_l(\vec{r})$ ist eine homogene Funktion vom Grad l , d.h. $f(s\vec{r}) = s^l f(\vec{r})$.

Wir schreiben den Gradienten in Kugelkoordinaten als $\vec{\nabla} = \hat{e}_r \partial_r + \hat{e}_\theta \frac{1}{r} \partial_\theta + \hat{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi$. Unter der Transformation $r \rightarrow sr$ $\vec{\nabla} \rightarrow s^{-1} \vec{\nabla}$. Damit transformiert sich die linke Seite von Gl. (2.18) mit s^{-l-1} woraus die Behauptung folgt.

Inversion Ist $\phi(\vec{r})$ eine Lösung der Laplacegleichung für $r > 0$, dann ist dies auch $\psi(\vec{r}) = \frac{1}{r} \phi(\vec{r}/r^2)$.

Dies lässt sich leicht nachrechnen, wenn man beide Funktionen in Kugelkoordinaten ausdrückt und den Laplaceoperator in Kugelkoordinaten

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\phi^2 \quad (2.19)$$

benutzt. Als Korrolar sehen wir, dass die so definierte Inverse der rechten Seite von Gl. (2.18) gerade $f_l(\vec{r})$ ist, somit ist $f_l(\vec{r})$ eine Lösung der Laplacegleichung für $r > 0$.

Homogene Polynome Motiviert durch diese Ergebnisse konzentrieren wir uns auf Lösungen der Laplacegleichung, die homogene Polynome vom Grad l sind. Wieviele linear unabhängige Lösungen gibt es? Nun, eine Basis des Raums aller Polynome sind die Monome $x^{k_1}y^{k_2}z^{k_3}$. Wir wollen das erst in zwei Dimensionen klären: Von den $x^{k_1}y^{k_2}$ fordern wir den Grad $n=k_1+k_2$. Dies führt zu $n+1$ unabhängigen Monomen vom Grad n . In drei Dimensionen geben wir zunächst k_3 einen festen Wert. Damit ist $k_1+k_2=l-k_3$. Für diesen Wert gibt es nach dem eben gesagten $l-k_3+1$ Möglichkeiten. Wenn wir das jetzt über k_3 summieren sehen wir, dass es $\frac{1}{2}(l+1)(l+2)$ solcher Monome gibt.

Wieviele dieser Monome lösen jetzt die Laplacegleichung? Nach zweimaligem Differenzieren entsteht ein Monom vom Grad $l-2$. Analog zu oben gibt es davon $\frac{1}{2}l(l-1)$ Stück. Dieses muss aber null sein, d.h. dies ist die Zahl der Einschränkungen. Die Gesamtzahl an Monomen vom Grad l die die Laplacegleichung lösen ist damit

$$\frac{1}{2}(l+1)(l+2) - \frac{1}{2}l(l-1) = 2l+1.$$

Dies ist ein bemerkenswertes Ergebnis. Wenn wir auf die Multipolmomente Ladung, Dipolmoment, und Quadrupolmoment zurückblicken so sehen wir, dass dies Beispiele für unsere Konstruktion sind: Es sind homogene Funktionen vom Grad $-l-1$ und es gibt 1,3, bzw. 5 von ihnen.

Zusammengefasst haben wir Lösungen der Laplacegleichung behandelt (ohne sie ausdrücklich zu konstruieren), die homogene Funktionen vom Grad l sind und zusammenhängen mit homogenen Funktionen vom Grad $-l-1$ zusammenhängen. In Kugelkoordinaten können wir die r -Abhängigkeit (die die Homogenität bestimmt) und die Winkelabhängigkeit separieren und diese beiden Gruppen von Lösungen schreiben als

$$r^l Y_{l,m}(\theta, \phi) \quad r^{-l-1} Y_{l,m}(\theta, \phi).$$

Die Funktionen $Y_{l,m}$ heißen *Kugelflächenfunktionen*.

Form der Kugelflächenfunktionen Wir wollen jetzt die $Y_{l,m}$ systematisch konstruieren. Wir machen das über den Ansatz der Lösung als homogene Funktion vom Grad l . Insbesondere fragen wir uns, unter welchen Bedingungen das Monom $(\vec{a} \cdot \vec{r})^l$ eine Lösung der Laplacegleichung ist. Wir differenzieren zwei Mal und erhalten

$$\Delta (\vec{a} \cdot \vec{r})^l = l(l-1) \vec{a}^2 (\vec{a} \cdot \vec{r})^{l-2} = 0.$$

Für $l \geq 2$ kann dies nur erreicht werden, wenn $\vec{a}^2 = 0$ was auch zwangsläufig zu einem komplexen \vec{a} führt. Wir definieren die komplexen Kombinationen $a_x + ia_y = \xi_-^2$ und $a_x - ia_y = -\xi_+^2$. Die komplexen Zahlen ξ_{\pm} sind dabei völlig beliebig und unabhängig, was wir gleich benutzen werden. Es folgt dann mittels

$$0 = \vec{a}^2 = (a_x - ia_y)(a_x + ia_y) + a_z^2$$

automatisch dass $a_z = \xi_+ \xi_-$ sein muss. Damit können wir den Winkelanteil schreiben

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \hat{e}_r &= \frac{1}{2} (a_x - ia_y) \frac{x + iy}{r} + \frac{1}{2} (a_x + ia_y) \frac{x - iy}{r} + a_z \frac{z}{r} \\ &= \frac{1}{2} [-\xi_+^2 \sin \theta e^{i\phi} + \xi_-^2 \sin \theta e^{-i\phi} + 2\xi_+ \xi_- \cos \theta].\end{aligned}$$

Dies erheben wir jetzt in die l -te Potenz und betreiben dann quadratische Ergänzung

$$\begin{aligned}(\vec{a} \cdot \hat{e}_r)^l &= \left(\frac{\xi_+^2 e^{i\phi}}{2 \sin \theta} \right)^l \left[\left(\frac{\xi_-}{\xi_+} \sin \theta e^{-i\phi} \right)^2 + 2 \frac{\xi_-}{\xi_+} \sin \theta \cos \theta e^{-i\phi} - \sin^2 \theta \right]^l \\ &= \left(\frac{\xi_+^2 e^{i\phi}}{2 \sin \theta} \right)^l \left[\left(\frac{\xi_-}{\xi_+} \sin \theta e^{-i\phi} + \cos \theta \right)^2 - 1 \right]^l.\end{aligned}$$

Jetzt betrachten wir einmal den Ausdruck in den eckigen Klammern. Diesen können wir schreiben als

$$[(\delta z + z_0)^2 - 1]^l = \sum_{s=0}^{2l} \frac{\delta z^m}{m!} \frac{d^s}{dz_0^s} (z_0^2 - 1)^l$$

wobei wir im zweiten Schritt eine Taylorentwicklung von $(z^2 - 1)^l$ um $z = z_0$ vorgenommen haben, die nach $2l$ - Termen enden muss, da wir ja ein Polynom der Ordnung $2l$ entwickeln. Die Taylorentwicklung eines Polynoms mag wie eine ungewöhnliche Maßnahme wirken ist aber sehr wirkungsvoll zur Verschiebung des Ursprungs. Wir setzen dies oben ein und substituieren $m = l - s$ und erhalten

$$\begin{aligned}(\vec{a} \cdot \hat{e}_r)^l &= \frac{\xi_+^{2l} e^{il\phi}}{2^l \sin^l \theta} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{(l-m)!} \left(\frac{\xi_-}{\xi_+} \sin \theta e^{-i\phi} \right)^{l-m} \frac{d^{l-m}}{d \cos^{l-m} \theta} (\cos^2 \theta - 1)^l \\ &= l! \sum_{m=-l}^l \frac{\xi_+^{l+m} \xi_-^{l-m}}{\sqrt{(l-m)! (l+m)!}} \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!}} \sin^{-m} \theta e^{im\phi} \frac{d^{l-m}}{d \cos^{l-m} \theta} \frac{(\cos^2 \theta - 1)^l}{2^l l!}.\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir einfach ein wenig ummultipliziert. Da die ξ_{\pm} beliebig waren und auf der linken Seite (aufgrund der Parameterisierung) auf jeden Fall eine Lösung der Laplacegleichung steht, ist rechts jeder Term eine Lösung der Laplacegleichung. Wir haben aus einer Lösung als $2l + 1$ Lösungen generiert. Wie definieren

$$\psi_{lm} = \frac{\xi_+^{l+m} \xi_-^{l-m}}{\sqrt{(l-m)! (l+m)!}}$$

und benutzen das bisher gewonnene zur Definition (mit geeigneter Vorfak-

torkonvention - dazu später - der Kugelflächenfunktionen

$$\begin{aligned} \frac{(\vec{a} \cdot \vec{r})^l}{l!} &= r^l \sum_{m=-l}^l \psi_{lm} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{lm}(\theta, \phi) \\ Y_{lm}(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!}} e^{im\phi} (\sin\theta)^{-m} \frac{d^{l-m}}{d \cos^{l-m} \theta} \frac{(\cos^2 \theta - 1)^l}{2^l l!}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Grundeigenschaften der Kugelflächenfunktionen Wir sehen an Gleichung (2.20), dass die Transformation $\xi_+ \leftrightarrow \xi_-$, $\theta \leftrightarrow -\theta$ und $\phi \leftrightarrow -\phi$ die Gleichung invariant lässt, d.h. für die Kugelflächenfunktionen

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = Y_{l,-m}(-\theta, -\phi)$$

was uns die alternative (und oft praktischere Darstellung) liefert

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} e^{im\phi} (-\sin\theta)^m \frac{d^{l+m}}{d \cos^{l+m} \theta} \frac{(\cos^2 \theta - 1)^l}{2^l l!}. \quad (2.21)$$

Wir listen Beispiele für niedrige Indexwerte

$$\begin{aligned} Y_{00} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\ Y_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta \\ Y_{1\pm 1} &= \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{\pm i\phi} \\ Y_{20} &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1) \\ Y_{2\pm 1} &= \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos\theta \sin\theta e^{\pm i\phi} \\ Y_{2\pm 2} &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Wir können weitere Eigenschaften ablesen: Der polare Anteil windet sich m mal um die Kugel, der azimuthale Anteil ist ein Polynom l ter Ordnung mit entsprechend vielen Nullstellen. Die Funktionen werden also mit steigenden Indizes immer anisotroper.

Orthogonalität Eine für praktische Rechnungen wichtige Eigenschaft der Kugelflächenfunktionen ist ihre Orthogonalität. Wir studieren dazu das Integral

$$\int d\Omega (\vec{a}^* \cdot \hat{e}_r)^l (\vec{a} \cdot \hat{e}_r)^{l'}$$

Da wir über alle Richtungen integrieren muss das Ergebnis ein rotationsinvarianter Skalar sein. Da $\vec{a}^2 = \vec{a}^{*2} = 0$ ist gibt es nur $\vec{a} \cdot \vec{a}^*$. Diese Kombination taucht genau dann als einzige auf, wenn $l = l'$ ist. Damit ist das Integral

$$\int d\Omega (\vec{a}^* \cdot \hat{e}_r)^l (\vec{a} \cdot \hat{e}_r)^{l'} = \delta_{ll'} C_l (\vec{a}^* \cdot \vec{a})^l.$$

Der Koeffizient C_l ist unabhängig von \vec{a} und \vec{a}^* so lange wie $\vec{a}^2 = 0$ ist. Wir wählen $\vec{a} = (1, i, 0)^T$. Damit ist das Integral (nur im Fall $l = l'$)

$$\begin{aligned} \int d\Omega (\sin \theta e^{-i\phi})^l (\sin \theta e^{i\phi})^l &= \int_{-1}^1 d \cos \theta \sin^{2l} \theta \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 dz (1 - z^2)^l \\ &= 4\pi \frac{(2^l l!)^2}{(2l + 1)!}. \end{aligned}$$

Den letzten Schritt kann man leicht mit vollständiger Induktion und partieller Integration zeigen. Wenn wir jetzt die Entwicklung (2.20) einsetzen, dann finden wir

$$\begin{aligned} \int d\Omega \frac{(\vec{a}^* \cdot \hat{e}_r)^l}{l!} \frac{(\vec{a} \cdot \hat{e}_r)^{l'}}{l'!} &= 4\pi \delta_{ll'} \frac{2^l}{(2l + 1)!} (\vec{a}^* \cdot \vec{a})^l \\ &= \sum_{m, m'} \psi_{l'm'}^* \psi_{lm} \sqrt{\frac{4\pi}{2l + 1}} \sqrt{\frac{4\pi}{2l' + 1}} \int d\Omega Y_{l'm'}^* Y_{lm}. \end{aligned}$$

Um einen vernünftigen Koeffizientenvergleich durchführen zu können, müssen wir $(\vec{a} \cdot \vec{a}^*)^l$ nach Potenzen von ξ_{\pm} sortieren. Wir finden mittels der binomischen Formel

$$\begin{aligned} \frac{2^l (\vec{a} \cdot \vec{a}^*)^l}{(2l + 1)!} &= \frac{(\xi_+^* \xi_+ + \xi_-^* \xi_-)^{2l}}{(2l + 1)!} \\ &= \frac{1}{(2l + 1)!} \sum_{m=-l}^l \frac{(2l)!}{(l + m)! (l - m)!} (\xi_+^* \xi_+)^{l+m} (\xi_-^* \xi_-)^{l-m} \\ &= \frac{1}{2l + 1} \sum \psi_{lm}^* \psi_{lm} \end{aligned}$$

Da klarerweise die Diskussion nur $m = m'$ beinhaltet, liefert Koeffizientenvergleich die Orthogonalitätsrelation

$$\int d\Omega Y_{l'm'}^* Y_{lm} = \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (2.23)$$

Legendrepolynome Da Kernelement der azimuthalen Abhängigkeit der Kugelflächenfunktionen sind die Legendrepolynome

$$P_l(x) = \frac{d^l}{dx^l} \frac{(x^2 - 1)^l}{2^l l!}.$$

Dies sind Polynome vom Grad l die so normiert sind, dass $P_l(1) = 1$ ist.

2.5.3 Multipolentwicklung in Kugelkoordinaten

Wir haben jetzt viele Eigenschaften der Kugelflächenfunktionen kennengelernt - wie helfen sie uns, elektrostatische Aufgaben zu lösen und insbesondere das Greensfunktionsintegral zu knacken?

Unsere Rechnung spielt sich in Kugelkoordinaten ab, d.h. wir benutzen die entsprechende Darstellung des Laplaceoperators Gl. Inversion. Wir haben schon gezeigt, dass für $r > 0$ die Funktionen $r^l Y_{lm}(\theta, \phi)$ und $r^{-l-1} Y_{lm}(\theta, \phi)$ Lösungen der Laplacegleichung sind. Wenn wir uns jetzt den Radialteil hernehmen finden wir

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) \left\{ \frac{r^l}{r^{-l-1}} \right\} = l(l+1) \left\{ \frac{r^l}{r^{-l-1}} \right\}$$

weshalb wir auch gezeigt haben, dass

$$\left[l(l+1) + \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\phi^2 \right] Y_{lm}(\theta, \phi) = 0$$

ist. Wir wollen jetzt die Greensche Funktion, also die Lösung von (2.12) konstruieren. Dazu schreiben wir das Diracdelta auf der rechten Seite in Kugelkoordinaten um

$$\delta^3(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{r^2} \delta(r - r') \frac{1}{\sin \theta} \delta(\theta - \theta') \delta(\phi - \phi')$$

(zum Beweis brauchen Sie die Substitutionsregel im Integral, Übungsaufgabe!). Damit brauchen wir für $r \neq r'$ eine Lösung der Laplacegleichung und setzen an, unter Berücksichtigung der Randbedingungen

$$G(\vec{r} - \vec{r}') = \begin{cases} \sum_{lm} A_{lm}(\theta', \phi') r^l Y_{lm}(\theta, \phi) & \text{für } r < r' \\ \sum_{lm} B_{lm}(\theta', \phi') r^{-l-1} Y_{lm}(\theta, \phi) & \text{für } r > r' \end{cases} \quad (2.24)$$

mit zu bestimmenden Koeffizienten A_{lm} und B_{lm} . An der Stelle $r = r'$ hätten wir jetzt gerne, dass die Funktion stetig ist, die Ableitung aber springt gemäß

$$-r^2 \frac{\partial G}{\partial r} \Big|_{r'-0+}^{r'+0+} = \frac{4\pi}{\sin \theta} \delta(\theta - \theta') \delta(\phi - \phi').$$

Zum Herleiten dieser Beziehung haben wir die Laplacegleichung über eine infinitesimale Kugelschale um $r = r'$ integriert. Wenn wir unseren Ansatz in die

Stetigkeitsbedingung einsetzen erhalten wir $r^l A_{lm} = r'^{l-1} B_{lm}$. Die Koeffizienten sind also nicht unabhängig, sondern können beide durch eine einzige Größe C_{lm} ausgedrückt werden gemäß

$$A_{lm} = r'^{l-1} C_{lm} \quad B_{lm} = r^l C_{lm}. \quad (2.25)$$

Die Anschlussbedingung für die Ableitung liefert

$$\begin{aligned} \sum_{lm} \left[(l+1) \frac{B_{lm}}{r'^l} + l r'^{l+1} A_{lm} \right] Y_{lm}(\theta, \phi) &= \\ \sum_{lm} (2l+1) C_{lm}(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) &= \frac{4\pi}{\sin \theta} \delta(\theta - \theta') \delta(\phi - \phi') \end{aligned} \quad (2.26)$$

Hier können wir jetzt die Orthonormierung benutzen, d.h. wir multiplizieren beide Seiten mit $Y_{lm}^*(\theta, \phi)$ und integrieren über den Raumwinkel Ω . Dies liefert

$$C_{lm} = \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}^*(\theta', \phi').$$

Wenn wir dies wieder in Gl. (2.26) einsetzen, dann erhalten wir

$$\sum_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi') = \frac{1}{\sin \theta} \delta(\theta - \theta') \delta(\phi - \phi').$$

Dieser Ausdruck mag auf den ersten Blick einer Orthonormierungsbedingung ähneln, aber die Indizes scheinen vertauscht. Tatsächlich ist das die *Vollständigkeitsrelation* für die Kugelflächenfunktionen - was rechts steht ist eine Art Einheitsmatrix zumindest für den Winkelteil der Kugelkoordinaten, links steht letztlich, dass wir durch das Zusammenfügen der Kugelflächenfunktionen die Einheit herstellen, also Vektoren auf sich selbst abbilden. Diese Art der Argumentation wird in der Quantenmechanik gang und gäbe sein - hier wird sie nachher in die Rechenmethode zur Anwendung der Multipolentwicklung einfließen. Dies zeigt uns auch, dass unser nonchalanter Ansatz, homogene Polynome zu suchen, und genügend Funktionen geliefert hat.

Jetzt können wir die Greensche Funktion aufschreiben, indem wir Gln. (2.24)(2.25) kombinieren zu

$$\begin{aligned} G(\vec{r} - \vec{r}') &= \frac{1}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \frac{r'^l}{r_{>}^{l+1}} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi') \\ r &= \min_{\max} \{r, r'\}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Damit können wir die Lösung eines elektrostatischen Problems schreiben, indem wir innere und äußere Multipolmomente definieren

$$\begin{aligned} q_{lm}^>(r) &= \int_0^r dr' r'^{l+2} \int d\Omega' Y_{lm}^*(\theta', \phi') \rho(\vec{r}') \\ q_{lm}^<(r) &= \int_r^{\infty} dr' r'^{l-1} \int d\Omega' Y_{lm}^*(\theta', \phi') \rho(\vec{r}') \end{aligned} \quad (2.29)$$

Diese sind nicht mehr von der Räumlichen Orientierung des Aufpunkts \vec{r} abhängig. Das gesamte Potenzial können wir dann als Kombination von inneren und äußeren Beiträgen schreiben

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{lm} \frac{1}{2l+1} \left[\frac{q_{lm}^>(r)}{r^{l+1}} + q_{lm}^<(r) r^l \right] Y_{lm}(\theta, \phi).$$

In praktischen Berechnungen von $q_{lm}^{> / <}$ können wir die Orthogonalität der Kugelflächenfunktionen (2.23) nutzen. Wir sehen, dass wenn der Aufpunkt außerhalb der Ladungsverteilung liegt, ist $q_{lm}^< = 0$ und das Potenzial fällt schneller ab, je höher der Multipolindex l ist, wie r^{-l-1} . Auch bedeutet höheres l dass die Ladungsverteilung und das Potenzial entsprechend anisotroper werden, siehe die Diskussion über die Eigenschaften der Kugelflächenfunktionen oben.

2.5.4 Beispiel: Doppelhalbkugelschale

Als Beispiel für diese Methode betrachten wir zwei hohle Halbkugelschalen vom Radius R , die entgegengesetzte Ladungen $\pm q$ tragen. Die Ladungsdichte ist also damit

$$\rho(r, \theta) = \sigma \delta(r - R) \text{sign}(\cos \theta)$$

wobei $\text{sign} x = x/|x|$ die Vorzeichenfunktion ist. Zunächst mal berechnen wir die Ladung der oberen Kugelschale

$$q = \rho \int dr r^2 \delta(r - R) \int_0^1 d \cos \theta \int d\phi = 2\pi \sigma R$$

also $\sigma = q/2\pi R^2$. Uns interessiert das Potenzial außerhalb, $r > R$. Für das Winkelintegral in Gl. (2.29) benötigen wir zunächst das azimuthale Integral. Gemäß Gl. (2.21) brauchen wir

$$\int_0^{2\pi} d\phi \rho(r, \theta) e^{im\phi} = 2\pi \rho(r, \theta) \delta_{m0}.$$

Wir sehen also, aufgrund der azimuthalen Symmetrie, also der ϕ -Unabhängigkeit von ρ tragen nur Terme mit $m = 0$ bei. Damit haben wir nur

$$Y_{l0}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \frac{d^l}{d \cos^l \theta} \frac{(\cos^2 \theta - 1)^l}{2^l l!}$$

zu benutzen. Wir sehen, dass dieses Polynom in $\cos \theta$ den Grad l hat und für (un)gerades l (un)gerade in $\cos \theta$ ist. Damit tragen nur ungerade l zum Integral

$$q_{l0}^> = 2qR^l \int_0^1 d \cos \theta Y_{l0}(\theta, \phi)$$

bei. Dies können wir noch ein wenig umformen zu, mit $l = 2k+1$

$$q_{2k+1,0}^> = \sqrt{\frac{4k+3}{4\pi}} qR^{2k+1} \frac{1}{2^{2k} (2k+1)!} \frac{d^{2k}}{d \cos^{2k} \theta} (\cos^2 \theta - 1)^{2k+1} \Big|_0^1.$$

An der oberen Grenze erhalten wir immer den Wert null, da bei $2k$ Ableitungen von $2k + 1$ Faktoren immer einer übrig bleibt. Wir haben also nur den Beitrag von der unteren Grenze. Andererseits haben wir durch das letzte Differenzieren immer einen Faktor $\cos\theta$, der an der unteren Grenze verschwindet, es sei denn $k = 0$. Damit bleibt nur der Dipolbeitrag $q_{1,0}^> = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}qR$. Insgesamt erhalten wir für das Potenzial, mittels Gl. (2.22)

$$\phi(|\vec{r}| > R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{r^2} \cos\theta.$$

2.6 Randwertprobleme der Elektrostatik

Wir haben uns jetzt einen Satz von Methoden zurecht gelegt, mit denen wir elektrostatische Probleme lösen können, bei denen die triviale Randbedingung $\phi(r \rightarrow \infty) \rightarrow \infty$ angenommen wird, die Ladungen sich also im leeren Raum bewegen. In der Praxis können wir das meist nicht annehmen. Stattdessen können Randbedingungen auf Flächen S vorgegeben sein. Man unterscheidet hierbei

- metallische Flächen: In Metallen können sich Ladungen frei bewegen, wenn sie elektrischen Feldern ausgesetzt sind. In der in diesem Kapitel diskutierten *statischen* Situation tritt dies nicht auf, darum sollten im Metall keine elektrischen Felder existieren. Im Inneren des Metalls sind diese dann auch von Oberflächenladungen abgeschirmt, darum müssen wir uns nicht weiter kümmern. An der Oberfläche können senkrechte Felder ebenfalls die Ladung nicht bewegen (Austritt von Elektronen durch starke Potentiale sei hierbei außer Acht gelassen). Entscheidend ist es dann, dass Felder, die *tangenzial* zur Metalloberfläche stehen, verschwinden. Das wird erreicht, indem das Potenzial auf der Metalloberfläche konstant gehalten wird. Der Wert kann dabei durch Anschluss an eine entsprechende Apparatur vorgegeben werden. Noch allgemeiner könnten wir uns vorstellen, dass eine Oberfläche aus lauter kleinen Metallsegmenten vorliegt, auf denen individuell ein Potenzial vorgegeben wird. Mathematisch nennen wir all diese Fälle einer Randbedingung mit vorgegebenem Potenzial die *Dirichlet-Randbedingung*.
- isolierende Flächen: Auf isolierenden Flächen, z.B. an der Oberfläche polarer Nichtleiter, sitzen i.A. starke Ladungen nahe der Oberfläche. Diese geben das elektrische Feld auf der Oberfläche vor. Hier spricht man von der *von-Neumann-Randbedingung*.

Im Allgemeinen sind in elektrostatischen Problemen gemischte Randbedingungen vorgegeben. Wir wollen jetzt unsere Greensfunktionsmethode dahingehend erweitern, dass wir exemplarisch den Fall von Dirichlet-Randbedingungen behandeln, was uns zur Methode der Spiegelladungen führen wird. Die Konstruktion des von-Neumann-Falls geht ganz analog