Kapitel 2

Elektrostatik

2.1 Problemstellung

In der Elektrostatik interessieren wir uns für rein elektrische Felder, d.h. $\vec{B} = 0$ und $\vec{j} = 0$. Wir interessieren und für den statischen Fall, d.h. die verbleibenden Variablen ρ und $\vec{E}$ hängen nur vom Ort $\vec{r}$ ab. Elektrostatische Apparate spielen eine große Rolle in physikalischen Aufbauten, aber auch in der Technik z.B. von Bildschirmröhren. Elektrostatische Felder beschreiben in guter Näherung den Atombau und Wechselwirkungen auf molekularer Skala - 'was die Welt, im Innersten zusammenhält'.

In nicht-pathologischen Eichungen ist für die Elektrostatik $\vec{A} = 0$. Die Gleichung für das verbleibende Skalarpotenzial ϕ (1.14) reduziert sich damit zur *Poissongleichung*

$$\Delta\phi\left(\vec{r}\right) = -\frac{\rho\left(\vec{r}\right)}{\epsilon_0}.$$

Der ladungsfreie Fall $\Delta\phi = 0$ hat mit *Laplacegleichung* einen speziellen Namen. Anders als im eindimensionalen Fall hat auch die Laplacegleichung vielfältige Lösungen. Er ist wichtig, da aufgrund der Linearität der Maxwellgleichungen zu jeder Lösung der Poissongleichung eine Lösung der Laplacegleichung addiert werden kann. Warum würden wir das tun? Nun, die Poissongleichung ist nur dann eindeutig lösbar, wenn wir zusätzlich eine Randbedingung auf einer geschlossenen Fläche angeben. Wir werden später spezielle Randbedingungen kennenlernen. Sie kennen dieses Phänomen aus der klassischen Mechanik - die Lösung ein und derselben Newtonschen Bewegungsgleichung kann sehr verschieden sein, ja nach Anfangsbedingung. Das heißt eine elektrostatische Aufgabe ist nur durch Angabe der vorgegebenen Ladungsverteilung ρ *und* eine Randbedingung komplett. Wir haben auch eine verbleibende Eichfreiheit: Da die physikalische Observable, das $\vec{E}$-Feld, eine Ableitung des Potenzials ist, können wir eine additive Konstante frei wählen.

2.2 Rotationssymetrische Aufgaben

Wir beginnen mit dem Spezialfall, dass die Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ um den Ursprung (den wir geeignet gewählt haben) vollständing rotationssymmetrisch ist und wir außerdem eine rotationssymetrische Randbedingung setzen. Zur mathematischen Beschreibung wählen wir Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ). In der theoretischen Physik übersetzen sich diese in kartesische Koordinaten (x, y, z) wie folgt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \quad r > 0,\, 0 \leq \theta \leq \pi,\, 0 \leq \phi \leq 2\pi.$$

Der Ortsvektor $\vec{r}$ hat damit automatisch die Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ). Wir können am Ort $\vec{r}$ ein Koordinatendreibein definieren aus

$$\hat{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \quad \hat{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \quad \hat{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Analog zu den Koordinatenvektoren in kartesischen Koordinaten zeigt $\hat{e}_r$ in die Richtung in der sich nur r verändert und θ und ϕ konstant sind etc. Wir nennen die Richtung von r die *radiale* Richtung, die von $\hat{e}_\theta$ *azimuthal* und die von $\hat{e}_\phi$ *polar*. Die Richtung der Einheitsvektoren ist selbst ortsabhängig und wir erhalten darum gekrümmte Koordinatenlinien - Längen- und Breitenkreise. Wir können ein Vektorfeld darum schreiben wie $\vec{E}(r, \theta, \phi) = E_r(r, \theta, \phi)\,\hat{e}_r + E_\theta(r, \theta, \phi)\,\hat{e}_\theta + E_\phi(r, \theta, \phi)\,\hat{e}_\phi$.

In der kugelsymmetrischen Situation gehen wir direkt über die Maxwellgleichung (1.14). Dazu benötigen wir eine Darstellung der Divergenz in Kugelkoordinaten. Anwendung der Kettenregel und der Substitutionsregeln gibt

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 E_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta E_\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_\phi}{\partial\phi}. \tag{2.1}$$

Wir können dies auf ein eindimensionales Problem reduzieren. $\vec{E}$ kann nur von r abhängen (da weder die Randbedingung noch die Ladungsverteilung diese Symmetrie brechen). Wir sehen leicht, dass dies erzwingt, dass das Feld in rein radiale Richtung zeigt, $\vec{E}(r) = E(r)\hat{e}_r$. Die Kombination aus (1.2)(2.1) ergibt

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 E_r\right) = \frac{r^2}{\epsilon_0}\rho(r).$$

Wir können diese Gleichung leicht integrieren zu

$$E_r(r) = \frac{1}{r^2\epsilon_0}\int_0^r dr'\; r'^2 \rho(r')\,. \tag{2.2}$$

Dieses Ergebnis kann auf eine physikalisch transparentere Art und Weise hergeleitet werden, die auch die Interpretation bestimmt. Wir starten von der Divergenz in der Maxwellgleichung (1.2) und wenden auf sie den Satz von Gauß

(1.1) an, wobei wir als Integrationsvolumen eine Kugel vom Radius r um den Ursprung wählen

$$\int_{r'=r} d^2r'\ E_r = \frac{1}{\epsilon_0}\int_{r'<r} d^3r'\ \rho\left(r'\right). \tag{2.3}$$

Das Integral auf der rechten Seite hat eine einfache Interpretation, es handelt sich um die von der Kugel eingeschlossene Ladung $Q(r)$. Aufgrund der Kugelsymmetrie können wir sie vereinfachten mittels

$$Q(r) = \int_{r'<r} d^3r'\rho\left(r'\right) = \int_0^r dr'\ r'^2 \int_{-1}^1 d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\phi\rho\left(r'\right).$$

Die Substitution in Kugelkoordinaten, die wir hier durchgeführt haben, lässt sich leicht aus deren Definition herleiten. Jetzt bringen wir die Rotationssymetrie ins Spiel und berechnen

$$Q(r) = 4\pi \int_0^r dr'\ r'^2\rho\left(r'\right). \tag{2.4}$$

Andereseits können wir uns jetzt an die linke Seite von Gl. (2.3) machen. Da $E\left(r\right)$nicht von den Winkeln abhängt, können wir es aus dem Integral herausziehen, das Integral reduziert sich zur Oberfläche und wir finden

$$E_r(r) = \frac{Q(r)}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \tag{2.5}$$

Dies ist das Coulombgesetz, und es ist offensichtlich äquivalent zu Gl. (2.2) via Gl. (2.4).

Als Beispiel betrachten wir die homogen geladene Kugel vom Radius R mit Gesamtladung Q. Die Ladungsdichte ist damit

$$\rho(r) = \frac{3Q}{4\pi R^3}\Theta\left(R-r\right)$$

wobei Θbdie Heavisidesche Stufenfunktion ist

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & x>0 \\ 1/2 & x=0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$

Hier ist der Wert bei $x=0$ meist nicht relevant, solange er endlich ist. Wir berechnen zunächst für $r<R$

$$Q(r) = 4\pi\int_0^r dr'\ r^{'2}\rho\left(r'\right) = \frac{3Q}{R^3}\left.\frac{r'^3}{3}\right|_0^r = Q\frac{r^3}{R^3}.$$

Damit haben aus Gleichung (2.5)

$$E_r\left(r\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\begin{cases} \frac{r}{R^3} & r<R \\ \frac{1}{r^2} & r>R \end{cases}$$

Hieraus können wir auch das elektrische Potenzial ausrechnen, anhand des Gradienten in Polarkoordinaten $E_r(r) = -\partial_r \phi(r)$. Typischerweise wählen wir $\phi(r \to \infty) = 0$ und können integrieren

$$\phi(r) = -\int_r^\infty dr'\ E_r\left(r'\right).$$

Für $r > R$ haben wir

$$\phi(r) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_r^\infty \frac{dr'}{r'^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{2.6}$$

und innerhalb der Kugel $r < R$

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3}\int_r^R dr'\ r' + \phi\left(R\right) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^3}\left(R^2 - r^2\right) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R}.$$

Besonders interessant ist der Fall einer Punktladung, d.h. die (endliche) Ladung Q ist konzentriert im Radius $R = 0$. Die Ladungsverteilung kann mit dem Diracdelta geschrieben werden als $\rho\left(\vec{r}\right) = Q\delta^3\left(\vec{r}\right)$. Hier gilt das Coulombpotential (2.6) überall.

2.3 Zylindersymmetrische Ladungsverteilung

Analog zur Vorgehensweise im kugelsymmetrischen Fall, können wir den Gaußschen Satz auch auf streng zylindersymmetrische Ladungsverteilungen anwenden. Die Zylinderkoordinaten (r, ϕ, z) [1] hängen mit den kartesischen Koordinaten via $x = r\cos\phi$ und $y = r\sin\phi$ zusammen. Zylindersymmetrie bedeutet hier, dass $\rho = \rho(r)$ ist also insbesondere nicht von z abhängt. Dies bedeutet, dass die Ladungsverteilung in z-Richtung unendlich ausgedehnt sein muss. Wir definieren hier $q\left(r\right)$ als die Ladung pro Länge, die in einem Zylinder der Länge r eingeschlossen ist. Dann ist mit Argumenten analog zu denen oben das elektrische Feld nur mit einer Komponente in radialer Richtung ausgestattet

$$\vec{E} = \frac{q(r)}{2\pi r}\hat{e}_\rho \quad \hat{e}_\rho = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

und das Potenzial mit dem für diese Symmetrie typischen logarithmischen Potenzial für den Fall einer Linienladung

$$\phi(r) = \frac{q}{2\pi}\log\frac{r}{r_0}. \tag{2.7}$$

Details als Übungsaufgabe.

[1] oftmals wird ρ statt r verwendet, was hier aber mit der Ladungsdichte verwechselt werden könnte

2.4 Allgemeine Lösung mittels Greenscher Funktion

2.4.1 Lineare Probleme und Greensche Funktionen

Wir beginnen zunächst mit der Betrachtung linearer Gleichungssyteme für einen (i.A. n-dimensionalen) Vektor $\mathbf{x}$. Für eine gegebene Inhomgenität können diese geschrieben werden als $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}$. Dieses können wir mit verschiedenen Methoden lösen, z.B. mittels Gauß-Elimination. Wenn die Aufgabe besonders wichtig ist und wir viele Inhomogenitäten studieren wollen, dann invertieren wir zuerst die Matrix, d.h. wir finden $\mathbf{A^{-1}}$ so, dass $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A^{-1}} = \mathbf{I}$. Wenn wir dies haben, dann können wir die Lösung zum ursprünglichen linearen Gleichungssystem reduzieren auf $\mathbf{x} = \mathbf{A^{-1}} \cdot \mathbf{y}$. Letzeres können wir leicht beweisen indem wir nachrrechnen $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A^{-1}} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y}$.

Die Eigenschaft, die wir hier eingesetzt haben, ist im Wesentlichen die Linearität der Gleichung. Da die Maxwellgleichungen auch linear sind, möchten wir diese Technik hier nutzen. Allerdings sind dies keine linearen algebraischen Gleichungen, sondern Differenzialgleichungen. Die "Vektoren" sind Funktionen und statt natürlicher Zahlen als Index müssen wir reelle Zahlen q (bzw. Tupel reeller Zahlen) als Index akzeptieren. Die Matrix $\mathbf{A}$ wird ersetzt durch den (beliebigen) Differenzialoperator $\mathbf{D_q}$ sowie eine Randbedingung. Wir stellen jetzt die Gleichungen aus dem algebraischen Problem - nicht in Matrix-, sondern in Koeffizientenschreibweise - mit den Differnzialversionen gegenüber. Wir möchten gerne lösen

$$\sum_i A_{ji} x_i = y_j \quad \mathbf{D}_q f(q) = g(q). \tag{2.8}$$

Die Inverse des linearen Operators nennen wir hier $G\left(q, q'\right)$. Die Bestimmungsgleichung ist

$$\sum_i A_{ji} A_{ik}^{-1} = \delta_{jk} \quad \mathbf{D}_q G(q, q') = \delta\left(q - q'\right) \ + \ \text{Randbedingungen}. \tag{2.9}$$

Hier haben wir für den Fall von Matrizen das Kroneckerdelta und für die Differenzialgleichung das Diracdelta eingeführt. Wenn wir G gefunden haben, können wir die ursprüngliche Differenzialgleichung für jede Inhomogenität $g(q)$ lösen indem wir ausrechnen

$$f(q) = \int dq' G\left(q, q'\right) g\left(q'\right).$$

An dieser Stelle sehen wir, dass es wichtig ist, G als 'Matrix' (also als Funktion von zwei Indizes) zu behandeln - was hier steht ist die Anwendung einer Matrix auf einen Vektor. Dies ist auch wichtig wenn wir nachrechnen, dass f tatsächlich Gl. (2.8) löst

$$\begin{aligned} D_q f(q) &= \mathrm{D}_q \int dq' \ G\left(q, q'\right) g\left(q'\right) = \int dq' \ \left[D_q G\left(q, q'\right)\right] g\left(q'\right) \\ &= \int dq' \ \delta\left(q - q'\right) g\left(q'\right) = g(q). \end{aligned}$$

Das Lösen einer lineren Differenzialgleichung kann also auf die Bestimmung einer Greenschen Funktion zurückgeführt werden - und auf die Berechnung des Integrals über die Inhomogenität. Dies definiert einen klaren Weg, den wir jetzt für die Elektrostatik beschreiten wollen.

2.4.2 Greensche Funktion für die Poissongleichung mit einfachen Randbedingungen

Die recht subtile Diskussion von Randbedingungen in Greensfunktionsproblemen wollen wir zunächst vermeiden, indem wir die Poissongleichung mit einer einfachen Randbedingung im Unendlichen betrachten

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \lim_{r\to\infty} \phi\left(\vec{r}\right) = 0. \tag{2.10}$$

Die Bestimmungsgleichung für die Greensche Funktion (2.9) ist in diesem Fall

$$\Delta G\left(\vec{r},\vec{r}'\right) = \delta^3\left(\vec{r}-\vec{r}'\right) \tag{2.11}$$

Da der Differenzialoperator selbst den Ort $\vec{r}$ nicht explizit enthält und auch die Randbedingung translationsunabhängig ist (verschobenes Unendlich ist immer noch Unendlich) hängt die Greensfunktion nur von der Differenz der Koordinaten $\vec{x} = \vec{r} - \vec{r}'$ ab und wir können umschreiben

$$\Delta G\left(\vec{x}\right) = \delta^3\left(\vec{x}\right). \tag{2.12}$$

Da die Funktion im unendlichen verschwindet, können die Gleichung Fouriertransformieren zu

$$-k^2 G\left(\vec{k}\right) = 1 \;\Rightarrow\; G\left(\vec{k}\right) = -\frac{1}{k^2}.$$

Diesen berückend einfachen Ausdruck wollen wir jetzt zurücktransformieren gemäß

$$G\left(\vec{x}\right) = \int \frac{d^3k}{\left(2\pi\right)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \frac{1}{k^2}.$$

Zur Behandlung dieses Integrals führen wir jetzt Kugelkoordinaten im $\vec{k}$-Raum ein und bestimmen dass θ der Winkel zwischen $\vec{k}$ und $\vec{x}$ ist. Damit haben wir

$$\begin{aligned} G\left(\vec{x}\right) &= -\int dk\, \frac{k^2}{\left(2\pi\right)^3} \frac{1}{k^2} \int d\cos\theta e^{ikx\cos\theta} \int d\phi \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int dk \int d\cos\theta\; e^{ikx\cos\theta} \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int dk \frac{1}{ikx}\; e^{ikx\cos\theta}\Big|_{\cos\theta=-1}^{\cos\theta=1} = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{\sin kx}{kx}. \end{aligned}$$

Das letzte Integral, das wir ausrechnen müssen, ist das über die sinc-Funktion, die Sie wahrscheinlich aus der Beugung kennen. Es ist $\frac{\pi}{2x}$ (nachschauen!) und wir finden insgesamt

$$G\left(\vec{r},\vec{r}'\right) = -\frac{1}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|} \tag{2.13}$$

Dies ist natürlich eine bekannte Funktion - bis auf den Vorfaktor $-q/\epsilon_0$ den wir beim Übergang von (2.10) zu (2.12) unterschlagen haben - das Potenzial von einer Punktladung am Punkt $\vec{r}'$ gemessen am Punkt $\vec{r}$. Klar, die Bestimmungsgleichung (2.11) ist ja auch die entsrechende Poissongleichung. Damit ist die Lösung des allgemeinen elektrostatischen Problems mit der einfachen Randbedingung, Gl. (2.10)

$$\phi\left(\vec{r}\right)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r' \; \frac{\rho\left(\vec{r}'\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}. \tag{2.14}$$

Wir schreiben also das Potenzial als mit der Ladungsdichte gewichtete Überlagerung von Punktladungen. Mit dem Finden dieser wichtigen Darstellung ist aber unsere Arbeit nicht erledigt, denn die Berechnung des Integrals erfordert im Allgemeinen weitere Näherungsmethoden.

2.4.3 Einfache Anwendung der Greensfunktionslösung

Wir betrachten einen Fall, in dem das Integral (2.14) geschlossen ausgerechnet werden kann: Eine Linienladung bei $x=y=0$ und $|z|<L$. Die Ladungsdichte ist $\rho\left(\vec{r}\right)=\sigma\delta\left(x\right)\delta\left(y\right)\Theta\left(L-|z|\right)$. $\sigma=Q/2L$ ist die Linienladungsdichte. Wir bezeichnen $R=\sqrt{x^2+y^2}$ und erhalten aus Gl. (2.14)(2.14)

$$\phi\left(\vec{r}\right)=\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_{-L}^{L}\frac{dz'}{\sqrt{R^2+\left(z-z'\right)^2}}=\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_{-(L/2+z)/R}^{(L/2-z)/R}\frac{ds}{\sqrt{1+s^2}}.$$

Hier haben wir $s=(z'-z)/R$ substituiert. Bei der Berechnung komplizierter Integrale durch Nachschlagen empfiehlt es sich immer, zuerst das Integral so einfach wie möglich dimensionslos zu machen. Hier sehen wir z.B. sofort, dass der Abstand des Aufpunkts vom Ende der Linienladung verglichen mit dem Abstand von der Linienladung ein wesentlicher Parameter ist. Wir schlagen nach und finden, dass

$$\phi\left(\vec{r}\right)=\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\left(\sinh^{-1}\frac{L/2-z}{R}+\sinh^{-1}\frac{\frac{L}{2}+z}{r}\right).$$

Wir können das im Fall $L\to\infty$ mit unserer Lösung mittels Gausschem Satz vergleichen. Wir nutzen die Identität $\sinh^{-1}x=\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ und finden

$$\phi\left(\vec{r}\right)=\frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0}\log\left(\frac{L}{R}\right)+\text{const.}$$

in Übereinstimmung mit Gl. (2.7).

2.5 Multipolentwicklung

Abgesehen von Spezialfällen ist das Integral in Gl. (2.14) schwierig zu berechnen. Wir führen darum die Multipolentwicklung als Näherungsmethode ein, die auch eine klare physikalische Interpretation zulässt.

2.5.1 Multipolentwicklung in kartesischen Koordinaten

Wir führen die Entwicklung zunächst in kartesischen Koordinaten durch, die einen besseren Anschluss zur Experimentalphysik erlauben aber schwer in hohe Ordnungen zu bringen sind. Die Crux an Gl. (2.14) ist die räumliche Abhängigkeit des Nenners

$$\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^{-1} = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{r}'}^{\,-1}.$$

Insbesondere das Skalarprodukt am Ende verdient besondere Aufmerksamkeit. Wir gehen jetzt davon aus, dass wir uns weit weg von der Ladungsverteilung befinden, d.h. außerhalb einer Kugel um den Ursprung mit Radius R ist keine Ladung, $\rho = 0$ und wir berechnen das Feld in einem Aufpunkt $\vec{r}$ mit $r \gg R$. Dies erlaubt es, r'/r als kleinen Parameter zu behandeln. Wir nutzen außerdem die binomische Reihenentwicklung

$$(1+x)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} 1/2 \\ k \end{pmatrix} x^k = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + O\left(x^3\right). \tag{2.15}$$

Wir entwickeln also

$$\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^{-1} = \frac{1}{r}\sqrt{1\text{-}2\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}}^{\,-1} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2} + -\frac{1}{2}\frac{r'^2}{r^2} + \frac{3}{2}\frac{\left(\vec{r}\cdot\vec{r}'\right)^2}{r^4}\right) + O\left(\frac{1}{r^4}\right). \tag{2.16}$$

Hier ist zu beachten, dass wir am Ende einmal einen Term aus der ersten Ordnung von (2.15) mit der zweiten Ordnung kombinieren, weil die beide die gleiche Ordnung in $1/r$ haben. Auch gilt es zu beachten, dass jedes $\vec{r}$ im Zähler natürlich mit $O(r)$ zur Gesamtordnung des betreffenden Terms zählt.

Wir diskutieren jetzt diese drei Ordnungen in $1/r$.

Der erste Term in der Klammer nähert $|\vec{r}-\vec{r}'|^{-1} \simeq 1/r$. In dieser Näherung ist dann Gl. (2.14) näherungsweise

$$\phi(\vec{r}) \simeq \phi_0(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad Q = \int d^3r\ \rho(\vec{r}).$$

Diese Ordnung fällt also wie $1/r$ ab und ist allein durch die Gesamtladung Q gegeben. Das Potenzial ist isotrop. Man nennt dies auch den Monopolbeitrag.

In der nächsten Ordnung erhalten wir eine Korrektur in der nächsten Ordnung von der Form

$$\phi_d(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{d}\cdot\vec{e}_r}{r^2} \quad \vec{d} = \int d^3r\ \vec{r}\rho(\vec{r}).$$