An der oberen Grenze erhalten wir immer den Wert null, da bei $2k$ Ableitungen von $2k+1$ Faktoren immer einer übrig bleibt. Wir haben also nur den Beitrag von der unteren Grenze. Andererseits haben wir durch das letzte Differenzieren immer einen Faktor $\cos\theta$, der an der unteren Grenze verschwindet, es sei denn $k=0$. Damit bleibt nur der Dipolbeitrag $q^{>}_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} qR$. Insgesamt erhalten wir für das Potenzial, mittels Gl. (2.22)

$$\phi\left(|\vec{r}| > R\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{r^2} \cos\theta.$$

2.6 Randwertprobleme der Elektrostatik

Wir haben uns jetzt einen Satz von Methoden zurecht gelegt, mit denen wir elektrostatische Probleme lösen können, bei denen die triviale Randbedingung $\phi\,(r \to \infty) \to \infty$ angenommen wird, die Ladungen sich also im leeren Raum bewegen. In der Praxis können wir das meist nicht annehmen. Stattdessen können Randbedinungen auf Flächen S vorgegeben sein. Man unterscheidet hierbei

- metallische Flächen: In Metallen können sich Ladungen frei bewegen, wenn sie elektrischen Feldern ausgesetzt sind. In der in diesem Kapitel diskutierten *statischen* Situation tritt dies nicht auf, darum sollten im Metall keine elektrischen Felder exisiteren. Im Inneren des Metalls sind diese dann auch von Oberflächenladungen abgeschirmt, darum müssen wir uns nicht weiter kümmern. An der Oberfläche können senkrechte Felder ebenfalls die Ladung nicht bewegen (Austritt von Elektronen durch starke Potenziale sei hierbei außer Acht gelassen). Entscheidend ist es dann, dass Felder, die *tangenzial* zur Metalloberfläche stehen, verschwinden. Das wird erreicht, indem das Potenzial auf der Metalloberfläche konstant gehalten wird. Der Wert kann dabei durch Anschluss an eine entsprechende Apparatur vorgegeben werden. Noch allgemeiner könnten wir uns vorstellen, dass eine Oberfläche aus lauter kleinen Metallsegmenten vorliegt, auf denen individuell ein Potenzial vorgegeben wird. Mathematisch nennen wir all diese Fälle einer Randbedingung mit vorgegebenem Potenzial die *Dirichlet-Randbedingung.*

- isolierende Flächen: Auf isolierenden Flächen, z.B. an der Oberfläche polarer Nichtleiter, sitzen i.A. starke Ladungen nahe der Oberfläche. Diese geben das elektrische Feld auf der Oberfläche vor. Hier spricht man von der *von-Neumann-Randbedingung.*

Im Allgemeinen sind in elektrostatischen Problemen gemischte Randbedingugnen vorgegeben. Wir wollen jetzt unsere Greensfunktionsmethode dahingehend erweitern, dass wir exemplarisch den Fall von Dirichlet-Randbedingungen behandeln, was uns zur Methode der Spiegelladungen führen wird. Die Konstruktion des von-Neumann-Falls geht ganz analog

2.6.1 Greensche Identität

Wir wollen zunächst eine Greensche Identität beweisen für ein beliebiges Volumen V mit Oberfläche ∂V. Für zwei beliebige Skalarfelder ϕ und ψ definieren wir ein Vektorfeld $\vec{A} = \phi\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\phi$. Die Divergenz dieses Feldes ist $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \phi\Delta\psi - \psi\Delta\phi$ nach Anwendung der Produktregel und weil die beiden gemischten Terme sich herausheben. Anwendung des Gaußschen Satzes liefert

$$\oint_{\partial V} d^2r \ \hat{n} \cdot \left(\phi\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\phi\right) = \int_V d^3r \ \left(\phi\Delta\psi - \psi\Delta\phi\right). \tag{2.30}$$

Hier muss hervorgehoben werden dass hier wie auch im Beweis des Gaußschen Satzes niemals vorausgesetzt wurde, dass ∂V zusammenhängend ist - es können hier beliebig komplexe, vielteilige Oberflächen behandelt werden.

2.6.2 Darstellung der Lösung des Randwertproblems

Wir wollen wiederum die Lösung des allgemeinen Dirichlet-Randwertproblems darstellen, indem wir eine geeignete Greensche Funktion gewichtet mit der Ladung über das betrachtete Volumen integrieren und dazu einen Term zählen, indem wir eine "Oberflächen-Greensfunktion" finden, die wir mit dem vorgegebenen Potenzial gewichtet über die Oberfläche integrieren sollen. Wir fordern, dass sich diese Funktionen nicht in die Quere kommen (und es stellt sich heraus, dass wir mit dieser Forderung die Aufgabe schon gelöst haben). Die im Volumen V definierte Dirichlet-Greensfunktion $G_D\left(\vec{r}, \vec{r}'\right)$löst also Gleichung (2.11) mit der Randbedingung

$$G_D\left(\vec{r}, \vec{r}' \in \partial\mathrm{V}\right) = G_D\left(\vec{r} \in \partial\mathrm{V}, \vec{r}'\right) 0. \tag{2.31}$$

Wir wenden jetzt die Greensche Identität mit $\vec{r}'$ als Integrationsvariable an. ϕ ist das gesuchte Potenzial und $\psi\left(\vec{r}'\right) = G_D\left(\vec{r}, \vec{r}'\right)$. Die beiden Seiten von Gl. (2.30) wären damit

$$\oint d^2r' \ \phi\left(\vec{r}'\right) \hat{n}\cdot\vec{\nabla}' G_D\left(\vec{r}, \vec{r}'\right) = \int_V d^3r' \left(\phi\left(\vec{r}'\right) \delta\left(\vec{r} - \vec{r}'\right) - \frac{1}{\epsilon_0} G_D\left(\vec{r}, \vec{r}'\right) \rho(\vec{r}')\right).$$

Damit können wir diese Gleichung auflösen nach

$$\phi\left(\vec{r}\right) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3r' \rho\left(\vec{r}'\right) G_D\left(\vec{r}, \vec{r}'\right) + \oint_{\partial V} d^2r' \phi\left(\vec{r}'\right) \hat{n} \cdot \vec{\nabla}' G_D\left(\vec{r}, \vec{r}'\right). \tag{2.32}$$

Damit können wir aus G_D das gesamte Potenzial für das Dirichlet-Problem konstruieren.

Bleibt die Aufgabe, G_D zu finden. Hier ist eine mögliche Strategie, zunächst von der normalen Greenschen Funktion G, Gl. (2.13) zu starten. Dazu können wir Lösungen der Laplacegleichung addieren, von denen wir mit den Kugelflächenfunktionen ja eine große Menge kennen, um die Randbedingung auf null zu setzen. Wir werden das konkret an einem Beispiel vorführen.

2.6.3 Beispiel: Dirichletproblem außerhalb einer Kugelschale

Hier sei das Volumen der Raum $r > R$, die Oberfläche ist dann $r = R$ und der Normalen-Einheitsvektor $-\hat{e}_r$ (Orientierung weil wir uns *außerhalb* der Kugelschale bewegen). Wir setzen für die Dirichlet-GF an $G_D = -\frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} + \delta G\left(\vec{r}, \vec{r}'\right)$. Wir schreiben sowohl die normale Greensfunktion als auch δG als Multipolentwicklung für $r = R$. Wir beachten, dass die Ladungen, die zur ersten GF beitragen, außerhalb der Kugel sitzen, also $r' > r$ während δG eine Lösung der *Laplace*-Gleichung für $r > R$ sein muss, also höchstens Quellen innerhalb der Kugel haben kann. Dies motiviert den Ansatz

$$\delta G = \sum_{lm} \frac{1}{2l+1} a_{lm}\left(r'\right) r^{-l-1} Y^*_{lm}\left(\theta', \phi'\right) Y_{lm}\left(\theta, \phi\right).$$

Damit haben wir als Randbedingung

$$0 = G_D\left(r = R, \vec{r}'\right) = \sum_{lm} \frac{1}{2l+1} \left(\frac{R^l}{r'^{l+1}} + \frac{a_{lm}}{r^{l+1}}\right) Y^*_{lm}\left(\theta', \phi'\right) Y_{lm}\left(\theta, \phi\right)$$

und erhalten $a_{lm} = -R^l r^{l+1}/r'^{l+1} \alpha_{lm}$. Hier ist α_{lm} eine Funktion, die für $r = R$ den Wert 1 hat. Wir fordern jetzt ebenfalls dass $G_D\left(\vec{r}, r' = R\right) = 0$. Analog ergibt sich $\alpha_{lm} = R^{l+1}/r^{l+1}$. Damit erhalten wir für die Dirichlet-Greensfunktion

$$G_D\left(\vec{r}, \vec{r}'\right) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \left(\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} - \frac{R^{2l+1}}{r_>^{l+1} r_<^{l+1}}\right) \sum_m Y^*_{lm}\left(\theta', \phi'\right) Y_{lm}\left(\theta, \phi\right).$$

Wir sehen, dass die Korrektur δG in der Tat überall für $r, r' > R$ stetig und differenzierbar ist und damit eine Lösung der Laplacegleichung ist. Zum Einsetzen in Gl. (1.10) benötigen wir noch die Richtungsableitung

$$\begin{aligned}
\partial_{r'} G_D\left(\vec{r}, \vec{r}'\right)\big|_{r'=R<r} &= \frac{\partial}{\partial_{r'}} \sum \frac{1}{2l+1} \left(\frac{r'^l}{r^{l+1}} - \frac{R^{2l+1}}{r^{l+1} r'^{l+1}}\right)\Bigg|_{r'=R} \sum_m Y^*_{lm} Y_{lm} \\
&= \sum_l \frac{R^{l-1}}{r^{l+1}} \sum_m Y^*_{lm}\left(\theta', \phi'\right) Y_{lm}\left(\theta, \phi\right).
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir insgesamt für diesen Fall von Gl. (2.32) den Ausdruck

$$\begin{aligned}
\phi\left(\vec{r}\right) &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_{r'>R} d^3 r' \; \rho\left(\vec{r}'\right) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \left(\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} - \frac{R^{2l+1}}{r_>^{l+1} r_<^{l+1}}\right) \sum_m Y^*_{lm}\left(\theta', \phi'\right) Y_{lm}\left(\theta, \phi\right) \\
&\quad - \oint_{r'=R} d^2 r' \; \phi\left(\vec{r}'\right) \sum_l \frac{R^{l-1}}{r^{l+1}} \sum_m Y^*_{lm}\left(\theta', \phi'\right) Y_{lm}\left(\theta, \phi\right). \qquad (2.33)
\end{aligned}$$

Seine weitere Bedeutung wollen wir uns an einer Anwendung erschließen.

2.6.4 Interpretation als Spiegelladung

Als Beispiel für die Anwendung der Dirichlet-Greensfunktion betrachten wir das Potenzial einer Punktladung q die wir zur geschickten Nutzung der Symmetrie am Punkt $z\hat{e}_z$ ansiedeln, die sich vor einer geerdeten Kugel, also $\phi\left(r=R\right)=0$. Damit fällt das zweite Integral in Gl. (2.33) weg. Wir werten das zweite Integral mit der Ladungsdichte $\rho=\frac{1}{z^2}\delta\left(r-z\right)\delta\left(\cos\theta-1\right)$. Da dies von ϕ unabhängig ist, erhalten wir nur Beiträge von $m=0$. Damit erhalten wir als Zwischenergebnis

$$\phi\left(\vec{r}\right)=\frac{q}{\epsilon_0}\sum_l\frac{1}{2l+1}\left(\frac{z_<^l}{z_>^{l+1}}-\frac{R^{2l+1}}{z_<^{l+1}z_>^{l+1}}\right)Y_{l0}^*\left(0\right)Y_{l0}\left(\theta,\phi\right)\qquad z_{</>}=\begin{array}{c}\min\\ \max\end{array}\left\{z,r\right\}.$$

Der erste Term ist nach Konstruktion nichts anderes als $\phi_0\left(\vec{r}'\right)=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-z\hat{e}_z|}$. Der zweite Term kann geschreieben werden als

$$\phi_s\left(\vec{r}\right)=-\frac{q}{\epsilon_0}\sum_l\frac{1}{2l+1}\frac{R^{2l+1}}{z^{l+1}r^{l+1}}Y_{l0}^*\left(0\right)Y_{l0}\left(\theta,\phi\right).$$

Wir faktorisieren $\frac{R^{2l+1}}{z^{l+1}}=\left(\frac{R^2}{z}\right)^l\frac{R}{z}$. Damit können wir

$$\phi_s\left(\vec{r}\right)=\frac{1}{\epsilon_0}\frac{qR}{z}\sum_l\frac{1}{2l+1}\frac{\left(\frac{R^2}{z}\right)^l}{r^{l+1}}Y_{l0}^*(0)Y_{l0}\left(\theta,0\right)=\frac{q'}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-z'\hat{e}_z|}.$$

Hier haben wir eine *Spiegelladung* $q'=-QR/z$ am Ort $z'\hat{e}_z$ mit $z'=R^2/z<R$ eingeführt - letztere Ungleichung ist insbesondere wichtig, da es sich hier um das Potenzial *außerhalb* der Spiegelladung(sverteilung) handelt. Dies können wir so verstehen: Wenn wir eine Spiegelladung geeignet anbauen, dann hat der entstehende Dipol automatisch die Kugelschale als Äquipotenzialfläche mit dem gewünschten Wert. Da der Bereich innerhalb der Kugel gar nicht zum untersuchten Bereich gehört ist dies keine physikalische Ladung, viel mehr wird das nötige Feld durch Influenzladungen auf der Kugeloberfläche produziert - die wir später auch ausrechnen können werden. Klarerweise folgt aus der Linearität der Elektrostatik, dass eine allgemeine Ladungdsdichte vor einer geerdeten Kugel eine entsprechende Spiegelladungsdichte. Mehr dazu in den Übungen.

Viele Texte über Elektrodynamik würden jetzt die Behandlung statischer Dielektrika anschließen. Wir machen das erst, wenn wir uns einen gewissen Überblick über Wellenausbreitung verschafft haben.