Skript zur TP III: Harmonischer Oszillator

Frank K. Wilhelm-Mauch

May 22, 2013

1 Einführung

Der harmonische Oszillator (HO) ist ein in der Physik allgegenwärtiges System. In der TP I haben Sie bestimmt schon gelernt, dass kleine Bewegungen um stabile Punkte in guter Näherung durch harmonische Oszillatoren beschrieben werden. In der TP V werden Sie lernen, dass sich auch das elektromagnetische Feld als System gekoppelter Oszillatoren darstellen lässt. Der Hamilton des HO ist

$$\hat{H}=\frac{\hat{p}^2}{2m}+\frac{m}{2}\omega^2\hat{x}^2 \quad [\hat{x},\hat{p}]=i\hbar \tag{1}$$

Dies wollen wir als alleinigen Ausgangspunkt unserer Rechnung nehmen. Wir könnten dieses System auch rein im Ortsraum, mit den Mitteln der ersten zwei Vorlesungswochen lösen. Dies ist aber allein relativ mühevoll - wir werden dies nachher als Korrolar unserer algebraischen Behandlung nachholen. Die klassische Lösung, die Lösung der Hamiltonschen Bewegungsgleichunen basierend auf Gl. (1) hat die Lösung

$$x(t)=\mathrm{x}(0)\cos\omega\mathrm{t}+\frac{p(0)}{m\omega}\sin\omega\mathrm{t} \quad \mathrm{p(t)=m}\dot{x}\,(t).$$

2 Diagonalisierung

Als erstes skalieren wir unsere variablen und führen dimensionslose (wovon Sie sich leicht überzeugen können) Operatoren ein gemäß

$$\hat{x}_0=\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x} \quad \hat{p}_0=\frac{1}{\sqrt{m\omega\hbar}}\hat{p}. \tag{2}$$

Diese Skalierung erreicht die folgenden dimensionslosen Größen

$$\hat{H}=\hbar\omega\hat{H}_0 \quad \hat{H}_0=\frac{1}{2}\left(\hat{p}_0^2+\hat{x}_0^2\right) \quad [\hat{x}_0,\hat{p}_0]=i. \tag{3}$$

Wir können uns bei der Form von $\hat{H}_0$ vom dritten Binom inspirieren lassen (nur inspirieren - das dritte Binom gilt bei nichtkommutierenden Operatoren nicht) und definieren

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{x}_0 + i\hat{p}_0\right) \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{x}_0 - i\hat{p}_0\right).$$

Der Kommutator zwischen diesen nichthermiteschen Operatoren ist

$$\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = \frac{1}{2}\left[\hat{x}_0 + i\hat{p}_0, \hat{x}_0 - i\hat{p}_0\right] = 1 \tag{4}$$

wobei wir nutzen, dass Operatoren mit sich selbst kommutieren, sowie Gl. (3). Damit wird das Produkt

$$\hat{n} \equiv \hat{a}^\dagger \hat{a} = \frac{1}{2}\left(\hat{x}_0^2 + \hat{p}_0^2 + i\left[\hat{x}_0, \hat{p}_0\right]\right) = \hat{H}_0 - \frac{1}{2}.$$

Damit haben $\hat{n}$ und $\hat{H}$ die gleichen Eigenvekoren und wir können die Eigenwerte auseinander konstruieren. Bevor wir das tun, realisieren wir noch dass

$$\begin{aligned} \left[\hat{N}, \hat{a}\right] &= \left[\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}\right] = -\hat{a} \\ \left[\hat{N}, \hat{a}^\dagger\right] &= \hat{a}^\dagger. \end{aligned} \tag{5}$$

2.1 Theoreme über das Spektrum von $\hat{n}$

Die Eigenwerte von $\hat{n}$ sind nicht negativ Für alle Zustände $|\phi\rangle$ gilt

$$0 \leq \left\|\hat{a}|\phi\rangle\right\|^2 = \left\langle \phi \left| \hat{a}^\dagger \hat{a} \right| \phi \right\rangle = n$$

wobei die letzte Gleichheit nur gilt, wenn $|\phi\rangle$ ein normierter Eigenzustand zum Eigenwert n ist.

Wenn $|\nu\rangle$ ein Eigenzustand zum Eigenwert ν ist , dann ist $\hat{a}|\nu\rangle$ein (nicht-normierter) Eigenzustand zu $\nu - 1$. Falls $\nu = 0$ dann ist $\hat{a}|0\rangle = 0$. Der zweite Teil der Aussage wird mit derselben Gleichung wie das erste Theorem bewisen

$$0 = \nu = \left\langle 0 \left| \hat{a}^\dagger \hat{a} \right| 0 \right\rangle = \left\|\hat{a}|0\rangle\right\|^2.$$

Der Nullvektor ist der einzige Vektor mit verschwindender Norm, damit folgt daraus der zweite Teil der Aussage.

Der erste Teil wird nachgerechnet wie folgt

$$\hat{n}\hat{a}|\nu\rangle = \left(\left[\hat{n}, \hat{a}\right] + \hat{n}\right)|\nu\rangle = \left(-1 + \nu\right)|\nu\rangle.$$

Im letzten Schritt haben wir die Eigenwerteigenschaft von $|\nu\rangle$ ausgenutzt, sowie Gl. (5) - und was dasteht ist die Eigenwertgleichung für $\hat{a}|\nu\rangle$.

Wenn $|\nu\rangle$ ein Eigenzustand zum Eigenwert ν ist , dann ist $\hat{a}^\dagger|\nu\rangle$ein (nicht-normierter) Eigenzustand zu $\nu + 1$. Siehe letztes Theorem. Aufgrund dieser Eigenschaften nennen wir $\hat{a}$ den Absteige und $\hat{a}^\dagger$ den Aufsteigeoperator.

Die Eigenwerte ν von $\hat{n}$ sind natürliche Zahlen (einschließlich null) Widerspruchsbeweis: Sei ν_0 ein nicht - natürlicher Eigenwert von $\hat{n}$ sowie $N = \lceil \nu_0 \rceil$ die nächstgrößere ganze Zahl. Die wiederholte Anwendung von $\hat{a}$ liefert

$$|\hat{\phi}\rangle = \hat{a}^{N_0}|\nu\rangle$$

was nach dem zweiten Theorem ein Eigenzustand mit Eigenwert $\nu - N_0 < 0$ ist, in Verletzung des ersten Theorems.

Der Grundzustand ist nichtentartet Der Grundzustand ist der zu $\nu = 0$. Im Ortsraum erfüllt seine Wellenfuntktion $\phi_0(x_0) = \langle x_0|0\rangle$ (in dimensionslosen Koordinaten) die DGL

$$0 = \langle x_0 \left| \hat{x}_0 + i\hat{p}_0 \right| 0\rangle = \left(x_0 - i\frac{d}{dx_0} \right) \phi_0(x_0).$$

Diese DGL hat eine eindeutige Lösung bis auf eine Integrationskonstante - die Norm. Die Lösung lautet

$$\phi_0\left(x_0\right) = Ce^{-x_0^2/2}. \tag{6}$$

mit $C = (2\pi)^{-1/2}$.

Alle Eigenzustande sind nichtentartet Dies können wir induktiv auf die Nichtentartung des Grundzustands zurückführen. Der Induktionsschritt $n \to n+1$ lautet ist: Seien $|n^i\rangle$ eine Basis der Eigenzustände zum Eigenwert n wobei der Index i die Multiplizität des Eigenwerts durchläuft. Für alle $|n+1^i\rangle$ gilt $\hat{n}|n+1^i\rangle = (n+1)\,|n+1^i\rangle$. Außerdem ist nach Theorem 2 auch $\hat{a}|n+1^i\rangle = c^i|n^i\rangle$ wobei die Normierungskonstante c^i wichtig ist, da Theorem 2 eine Aussage über nichtnormierte Eigenzustände ist. Jetzt können wir beide Gleichungen kombinieren

$$c^i\hat{a}^\dagger|n^i\rangle = \hat{a}^\dagger\hat{a}|n+1^i\rangle = (n+1)\,|n+1^i\rangle.$$

Damit haben wir eine eindeutige (!) Konstruktion für $|n+1^i\rangle$ gefunden

$$|n+1^i\rangle = \frac{c^i}{n+1}\hat{a}^\dagger|n^i\rangle. \tag{7}$$

Aus der Normierung beider Zustände können wir auch $c^i = \sqrt{n+1}$ berechnen.

2.2 Eigenzustände

Wir haben jetzt festgestellt, dass

- die Energie-Eigenwerte des harmonischen Oszillators $E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$ sind, mit $n = 0, 1, 2, \ldots$

- diese Eigenwerte nichtentartet sind, d.h. die entsprechenden Eigenräume nichtentartet sind.

Wir wollen jetzt die entsprechenden Eigenzustände näher untersuchen. Wir verbleiben in skalierten Koordinaten - die Reskalierung kann leicht mit Gl. 2 durchgeführt werden. Wir haben bereits gesehen, dass der Grundzustand Gaussform hat, Gl.6. Wir haben jetzt gelernt, Gleichung 7 wie wir daraus alle höheren Eigenzustände konstruieren. Im Ortsraum übersetzt sich dies in

$$\Phi_n\left(x_0\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{n!2^n}}\left(x_0-\frac{d}{dx_0}\right)^n e^{-x_0^2/2}.$$

Die wiederholte Anwendung von Ableitung und Multiplikation erzeugt ein Polynom, das Hermite-Polynom $H_n\left(x\right)$ definiert als

$$H_n(x)=e^{x^2/2}\left(x-\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2/2}.$$

Wir können leicht konstruieren dass

$$\begin{aligned} H_0 &= 1\\ H_1 &= 2x\\ H_2 &= 4x^2-1 \end{aligned}$$

und allgemein dass die (un)geraden Hermitepolynome (un)gerade Parität haben. Weitere Eigneschaften werden Sie als Übungsaufgaben diskutieren.

3 Physikalische Diskussion

Der harmonische Oszillator ist ein sehr einfaches System und wir können eine gewisse Anschauung entwickeln. Beginnen wir mit der Natur der stationären Zustände $|n\rangle$. In ihnen ist

$$\begin{aligned} \left\langle n\left|\hat{x}\right|n\right\rangle &\propto \left\langle n\left|\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right|n\right\rangle=0\\ \left\langle n\left|\hat{p}\right|n\right\rangle &\propto i\left\langle n\left|\hat{a}-\hat{a}^\dagger\right|n\right\rangle=0 \end{aligned}$$

wobei wir verwenden, dass Auf- und Absteigeoperator den Eigenwert um 1 ändern müssen. Anders sieht das bei deren Quadraten aus

$$\left\langle n\left|\hat{x}^2\right|n\right\rangle=\frac{\hbar}{2m\omega}\left\langle n\left|\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right)^2\right|n\right\rangle=\frac{\hbar}{2m\omega}\left\langle n\left|\hat{a}^2+\hat{a}\hat{a}^\dagger+\hat{a}^\dagger\hat{a}+\hat{a}^{\dagger 2}\right|n\right\rangle$$

der erste und der letzte Term ändern n um 2 also ist ihr Erwartungswert null. Die beiden Mittleren können wir mittels Gl. 4 zu $2\hat{n}+1$ umformen und finden $\left\langle n\left|\hat{x}^2\right|n\right\rangle=\frac{\hbar}{m\omega}\left(n+\frac{1}{2}\right)$. Ein analoges Argument liefert uns $\left\langle n\left|\hat{p}^2\right|n\right\rangle= m\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$. Wir sehen also, dass unser Harmonischer Oszillator im Erwartungswert vieler Messungen zwar still im Ursprung liegt, jedoch mit wachsender Unsicherheit, je höher wir mit n gehen. Dies hat nicht ohne weiteres eine klassische

Entsprechung, insbesondere sollten wir die $|n\rangle$ nicht mit klassischen Bahnen verwechseln. Wir sehen für die Unsicherheit

$$\Delta x \cdot \Delta p = \hbar \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

das heisst nur der Grundzustand $n = 0$ erreicht die durch die Heisenbergsche Unschärferelation gesetzte Grenze. Wichtig ist auch: Selbist im Grundzustand sind die Unsicherheiten größer als null und ebenso die Energie $E_0 = \hbar\omega/2$. Diese quantenmechanische Nullpunktsenergie resultiert direkt aus der Unschärferelation. Man kann aus diesen Nullpunktsfluktuationen keine weitere Energie entnehmen (denn es ist ja der Grundzustand) jedoch hat sie weitreichende Konsquenzen z.B. in der Quantentheorie des Kosmos oder bei der Wechselwirkung von Licht und Materie.

Schlussendlich wollen wir die Zeitentwicklung des Systems betrachten. Ein Anfangszustand mit $|\psi\rangle(0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$ entwickelt sich gemäß

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i(n+1/2)\omega t} c_n |n\rangle.$$

Für due Erwartungswerte gelten nach Ehrenfest die semiklassischen Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d\langle \hat{x} \rangle}{dt} &= \frac{\langle \hat{p} \rangle}{m} \\ \frac{d\langle \hat{p} \rangle}{dt} &= -m\omega^2 \langle \hat{x} \rangle . \end{aligned}$$