Entwurf: Skript für die TP II

Frank K. Wilhelm-Mauch

14. Oktober 2013

FR Theoretische Physik, Universität des Saarlandes

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Für die meisten Gebiete von Physik und Chemie ist die elektromagnetische Wechselwirkung die Wichtigste. Sie dominiert den Atombau, die Festkörperphysik, biologische Wechselwirkungen und andere. Elektromagnetismus ist unter anderem die Theorie der Wellenausbreitung, also Licht, alle Arten von Funk und ist damit zentral für Wissenschaft, Technologie, und die Menschliche Existenz als solche. Die Grundlage der Theorie des klassischen (nicht-quantenphysikalischen) Elektromagnetismus wurde im 19. Jahrhundert in Form der Maxwellgleichungen gelegt. Wenn wir uns auch an die zugrundeliegenden Begriffe wie dem des Feldes gewöhnt haben war diese Theorie für die Menschen dieser Zeit ähnlich ungewöhnlich wie die Quantenmechanik im 20. Jahrhundert und wie evtl. die Stringtheorie für uns (falls sie denn stimmt). Die Wirkmächtigkeit dieser Theorie ist nicht zu unterschätzen - letztendlich ist auch die spezielle Relativitätstheorie letzlich ein Korrolar der Maxwellgleichungen, was wir in dieser Vorlesung diskutieren werden.

In der TP II nähern wir uns der mathematischen Struktur des Elektromagnetismus und entwickeln leistungsfähige Methoden zur Berechnung elektromagnetischer Felder und Potenziale. Anders als in der Experimentalphysik, in der die Phänomene des Elektromagnetismus schrittweise aufgebaut werden, gehen wir deduktiv vor: Wir nehmen die Maxwellgleichungen als Axiom an und diskutieren ihre Lösungen und die daraus resultierende Physik. Wir benutzen dazu Methoden der Vektoranalysis, die wir mit dieser Vorlesung wiederholen bzw. entwickeln.

Wie in jeder Theorievorlesung ist das Entscheidende im Lernvorgang das Rechnen von Übungsaufgaben. Auch ein Musikinstrument erlernen Sie nur durch Übung, nicht durch Beobachtung. Ein Schlüssel in diesen Aufgaben ist die geschickte Nutzung der Symmetrie - dies ist ein wichtiges Lernziel der TP II bezüglich Ihrer Problemlösungskompetenz.

Es gibt ein Meer an Lehrbüchern zum Elektromagnetismus. Warum dieses Skript? Wir betonen die Ausbreitung von Wellen etwas stärker als statische Modelle. Wir diskutieren die Relativität auf zwei verschiedenen Ebenen, grafisch und formal. Manches aus diesem Skript beruht auf einem älteren, englischsprachigen Skript (Physics 706 - graduate electromagnetism), das ich an der University of Waterloo erstellt habe. Selbstverständlich ist vieles der Lehrbuchliteratur angelegt, insbesondere Jackson, Schwinger, Landau-Lifschitz Bände II und VIII, Fließbach sowie für die Relativitätstheorie Mermin.

Kapitel 1

Vorbemerkungen, mathematisch und strukturell

1.1 Felder als Observable

Sie haben vor dieser Vorlesung wahrscheinlich theoretische Mechanik gelernt. In dieser Theorie in ihrer einfachsten Form werden Massenpukte mit verallgemeinerten Koordinaten $\{q_i, \dot{q}_i\}$ betrachtet. Wir haben verschiedene Methoden, für diese Koordinaten Bewegungsgleichungen herleiten, die den Newtonschen Bewegungsgleichungen äquivalent sind. Diese sind ein System gewöhnlicher Differenzialgleichungen in denen nach der Zeit differenziert wird (Ableitungen nach Koordinaten tauchen in der Herleitung auf, aber nicht in der Bewegungsgleichung). Die Lösung sind Bahnkurven $\{q_i(t)\}$. Damit ist die Zeit t der *Parameter* der Theorie und die $\{q_i, \dot{q}_i\}$ sind ihre *Observablen*.

In der Elektrodynamik behandeln wir stattdessen die Felder $\vec{E}(\vec{r}, t)$ und $\vec{B}(\vec{r}, t)$, die elektrischen und magnetischen Komponenten des elektromagnetischen Feldes. Wir werden bald auch die Potenziale $\phi(\vec{r}, t)$ und $\vec{A}(\vec{r}, t)$ einführen. Physikalisch bilden $\vec{E}$ und $\vec{B}$ die Observablen der Elektrodynamik. Diese hängen vom Ort $\vec{r}$ und der Zeit t ab, die damit die Parameter sind (zu den Besonderheiten der Tatsache, dass wir eigentlich viel lieber mit den Potenzialen arbeiten, kommen wir ebenfalls später). Wir nennen Funktionen wie $\vec{E}$, $\vec{B}$ und $\vec{A}$, die $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ abbildet, also vektorwertig ist, *Vektorfelder*. Funktionen wie Φ die $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ abbilden heißen dementsprechend *Skalarfelder*.

Ähnlich wie in der Mechanik müssen wir in der Lage sein, nach unseren Parametern zu differenzieren. Wir schreiben Ableitungen als parziell mit dem Ableitungssymbol ∂ um zu kennzeichnen, dass wir keine weitere Verknüpfung zwischen den Koordinaten benutzen und zwischen ihnen keine Kettenregel anwenden. Parzielle Ableitungen nach der Zeit sind klar, ebenso nach einzelnen Raumkoordinaten x, y, z. Wir fassen diese zusammen im Nabla-Operator, einem

Vektor

$$\vec{\nabla} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Diesen können wir auf verschiedene Art auf Felder anwenden, deren Bedeutung sich in Verknüpfung mit Integralsätzen erschließt.

1.1.1 Der Gradient

Die Anwendung des Nablaoperators auf ein Skalarfeld bildet den Gradienten, ein Vektorfeld

$$\mathrm{grad}\phi \equiv \vec{\nabla}\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Wenn wir die Richtungsableitung entlang eines Einheitsvektor $\hat{e}$ bilden möchte, so ist diese

$$\sum_i e_i \frac{\partial \phi}{\partial r_i} = \hat{e} \cdot \vec{\nabla}\phi.$$

Hier benutzen wir die Konvention, dass wir die drei Komponenten des Ortsvektors

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

als r_i bezeichnen, was das Schreiben von Summen erleichtert. Damit zeigt der Gradient in die Richtung des steilsten Anstiegs uns seine Länge ist die Größe dieses steilsten Anstiegs. Insbesondere hat der Gradient ein einfaches Linienintegral. Wenn wir über eine infinitesimale Strecke $d\vec{r} = \hat{e}dr$ integrieren, so ist dieses Integral

$$d\vec{r} \cdot \nabla\phi = dr \left(\hat{e} \cdot \vec{\nabla}\phi\right) = \phi\left(\vec{r} + d\vec{r}\right) - \phi\left(\vec{r}\right).$$

Wenn wir viele solche Strecken zu einem Weg S zwischen $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ zusammensetzen, so summieren wir lauter solche Stücke auf. Dabei heben sich alle Zwischenterme in der Form einer Teleskopsumme weg und wir finden

$$\int_S d\vec{r} \cdot \vec{\nabla}\phi = \phi\left(\vec{r}_2\right) - \phi\left(\vec{r}_1\right).$$

Dieses Ergebnis hängt nur von den Endpunkten ab, nicht davon, wie der Weg S diese verbindet. Auch sind damit Integrale über geschlossene Wege $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$ gleich null.

1.1.2 Die Divergenz

Wir können den Nablaoperator als Skalarprodukt auf ein Vektorfeld $\vec{A}$ anwenden und erhalten die Divergenz

$$\mathrm{div}\vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \sum_i \frac{\partial A_i}{\partial r_1}.$$

Die Divergenz selbst ist ein Skalar. Um Ihre Bedeutung besser zu verstehen, schauen wir uns ein kleines quaderförmiges Volumen an mit einer Ecke bei $\vec{r}$ und der anderen bei $\vec{r}+d\vec{r}$ liegt. Wir betrachten den Fluss von $\vec{A}$ durch eine der Deckflächen und wollen den Fluss aus dem Volumen heraus als positiv bewerten. Wir beginnen bei der Fläche mit $\vec{r}$ als eine der Ecken, die parallel zur yz Ebene ist. Der Fluss durch diese Fläche ist $-\vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{e}_x dydz = -A_x\left(\vec{r}\right) dydz$ wobei wir den Einheitsvektor in x- Richtung $\hat{e}_x$ eingeführt haben. Der Fluss durch die gegenüberliegende Seitenfläche ist

$$A_x\left(\vec{r} + \hat{e}_x dx\right) dydz = A_x\left(\vec{r}\right) dydz + \frac{\partial A_x}{\partial x} dxdydz.$$

Der erste Term hebt sich mit der anderen Fläche heraus. Wenn wir dieses Argument für die anderen Richtungen wiederholen finden wir für die gesamte Flussänderung

$$d\mathrm{Fluss} = \sum_i \frac{\partial A_i}{\partial r_i} dxdydz = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dV.$$

Damit bezeichnet die Divergenz den Fluss aus einem infinitesimalen Volumen, misst also, wieviele Feldlinien anfangen (positiv) oder enden (negativ).

Auch hier können wir wieder ein größeres Volumen V aus solchen Volumenelementen zusammensetzen. Der Fluss aus Volumenelementen, die eine Fläche teilen, hebt sich gegenseitig heraus, wiederum im Stil einer Teleskopsumme, so dass nur der Fluss durch die äußeree Oberfläche, die Oberfläche ∂V von V übrigbleibt. Wir erhalten

$$\int_{\partial V} d^2 r \ \left(\hat{n} \cdot \vec{A}\right) = \int_V d^3 r \ \vec{\nabla} \cdot \vec{A}. \tag{1.1}$$

Hier ist $\hat{n}$ der normierte Normalenvektor auf ∂V. Dieses Ergebnis ist der Gaußsche Integralsatz.

1.1.3 Die Rotation

Wir können den Vektor $\vec{\nabla}$ auch in Form eines Vektorproduktes auf ein Vektorfeld $\vec{A}$ anwenden. Dies ist die Rotation

$$\mathrm{rot}\vec{A} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Damit entsteht wieder ein Vektor. Auch dieser kann wiedrer durch geeignete Integration diskutiert werden. Wir wählen ein kleines Quadrat mit Stützpunkt $\vec{r}$ und legen es parallel zur xy-Ebene. Wir schauen jetzt die in diesem Quadrat liegende Wirbelstärke aus, indem wir ein Wegintegral über $\vec{A}$ einmal um die Fläche herum legen. Das Wirbel-Integral entlang dieses infinitesimalen Weges ∂S ist

$$
\begin{aligned}
d\text{Wirbel} &= \frac{1}{2}\Big[\Big(\vec{A}(\vec{r})+\vec{A}(\vec{r}+\mathrm{d}\vec{x})\Big)d\vec{x}+\Big(\vec{A}(\vec{r}+\mathrm{d}\vec{x})+\vec{A}(\vec{r}+d\vec{x}+d\vec{y})\Big)d\vec{y}- \\
&\quad -\Big(\vec{A}(\vec{r}+d\vec{x}+d\vec{y})+\vec{A}(\vec{r}+d\vec{y})\Big)d\vec{x}-\Big(\vec{A}(\vec{r})+\vec{A}(\vec{r}+d\vec{y})\Big)d\vec{y}\Big]
\end{aligned}
$$

wobei wir als Kurznotation $d\vec{x}=\hat{e}_x dx$ benutzt haben. Wir nutzen dies und entwickeln außerdem $\vec{A}$ in erste Ordnung des Differenzials. Wir erhalten

$$
d\text{Wirbel}=\left(-\frac{\partial A_x}{\partial y}+\frac{\partial A_y}{\partial x}\right)dxdy=\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)\cdot\hat{e}_z d^2r.
$$

Das heißt, die Rotation misst die lokale Wirbelstärke. Auch hier können wir wieder über viele Flächenelemente integrieren, die Zwischenpunkte heben sich heraus und wir finden mit einer Fläche F

$$
\oint_{\partial F} d\vec{r}\cdot\vec{A}=\int_F d^2r\ \hat{n}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right).
$$

Dies ist der Integralsatz von Stokes.

1.2 Ladungs- und Stromdichte

Elektromagnetische Felder werden von elektrischen Ladungen und Strömen produziert. Die Ladungsdichte $\rho(\vec{r},t)$ haftet Materie an. Wenn die Materie nun fließt, und wir an für die Bewegung dieseser Materie ein Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{r},t)$ bestimmen können, dann folgt daraus die Stromdichte $\vec{j}(\vec{r},t)=\rho(\vec{r},t)\,\vec{v}(\vec{r},t)$. Wenn die Ladung an Punktteilchen q_i mit Koordinaten $\vec{r}_i$ haftet ist damit

$$
\begin{aligned}
\rho(\vec{r},t) &= \sum_i q_i\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_i(t)) \\
\vec{j}(\vec{r},t) &= \sum_i q_i\dot{\vec{r}}_i\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_i(t)).
\end{aligned}
$$

1.3 Die Maxwellgleichungen

Jetzt können wir die Maxwellgleichungen hinschreiben. Die erste ist das Coulombsche Gesetz

$$
\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\rho/\epsilon_0. \tag{1.2}
$$

Es sagt also, dass die Ladungen die Quellen des elektrischen Feldes sind. ϵ_0 ist eine dem SI-Einheitensystem geschuldete Konstante. Oft wird in der theoretischen Elektrodynamik das cgs-System verwendet, das an einigen Stellen einfachere Gleichungen liefert. Wir tun das aber nicht. Die zweite sagt, dass die Feldlinien des magnetischen Feldes alle geschlossen sind

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \tag{1.3}$$

Die nächste ist das Faraday'sche Induktionsgesetz

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \tag{1.4}$$

Es besagt, dass zeitlich veränderliche Magnetfelder zu Wirbeln des elektrischen Feldes führen. Schließlich haben wir das Amperesche Gesetz

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right). \tag{1.5}$$

Es sagt, dass die Wirbel des magnetischen Feldes von Strömen herrühren - einmal von elektrischen Strömen, einmal vom Maxwellschen Verschiebungsstrom. Wir können die Maxwellgleichungen in verschiedene Gruppen aufteilen. Besonders praktisch ist die Zusammenfassung in homogene Maxwellgleichungen, also die, die nur Felder enthalten, Gleichungen (1.3)(1.4) und die inhomogenen, die von Ladungen und Strömen abhängen, (1.2)(1.5). Wir werden uns später die Konsequenzen dieser Aufteilung anschauen. Wir sehen auch, dass die vier Gleichungen linear sind, d.h. es existiert ein Superpositionsprizip: Wenn $\vec{E}_1$ und $\vec{B}_1$ die Gleichungen für gegebenes ρ_1 und $\vec{j}_1$ lösen, und $\vec{E}_2$ und $\vec{B}_2$ die Gleichungen für gegebenes ρ_2 und $\vec{j}_2$, dann lösen $\vec{E}_1 + \vec{E}_2$ und $\vec{B}_1 + \vec{B}_2$ die Gleichungen für gegebenes $\rho_1 + \rho_2$ und $\vec{j}_1 + \vec{j}_2$.

1.4 Erhaltungssätze

In der Mechanik haben wir die besondere Bedeutung von Erhaltungssätzen für das Verständnis von Bewegungen und die Lösung von Bewegungsgleichungen kennengelernt. Dort hatten die, für eine gegebene Observable $A\left(\{q_i, \dot{q}_i\}, t\right)$ die Form

$$\frac{dA}{dt} = \sum_i \left(\dot{q}_i \frac{\partial A}{\partial q_i} + \ddot{q}_i \frac{\partial A}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial A}{\partial t} = 0.$$

Wir lesen das als: A ändert sich entlang der Bewegung, die durch die Lösung der Bewegungsgleichung vorgegeben ist, nicht. Wir nehmen also die Struktur der Bewegungsgleichung mit, wenn wir einen Erhaltungssatz nachweisen. Auch sehen wir, dass der Erhaltungssatz eine Ableitung der Größe nach dem Parameter der Theorie, der Zeit, beinhaltet.

In der Elektrodynamik wollen wir eine ähnliche Aussage treffen, allerdings unter den Gegebenheiten eines Feldes. Dies geschieht in der Form eines *lokalen*

Erhaltungssatzes : Zu einer Observablen A geben wir eine lokale Dichte ρ_A an. Eine Größe ist dann erhalten, wenn die einzige Möglichkeit einer zeitlichen Änderung von $\rho_A(\vec{r},t)$ ist, dass ein Strom von A geschrieben als $\vec{j}_A$ in ein infinitesimales Volumen um den Punkt $\vec{r}$ herum fließt. Wie wir gerade gelernt haben, drückt die Divergenz den Strom *aus* dem Volumen aus und wir schreiben den Erhaltungssatz von A als

$$\dot{\rho}_A + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_A = 0. \tag{1.6}$$

Nach dieser Konstruktion können wir das auch interpretieren, dass A fließt oder sich lokal aufstaut, aber nirgends produziert oder geschluckt wird, also keine Quellen und Senken besitzt. Darum nennen wir Gleichungen vom Typ 1.6 auch *Kontinuitätsgleichung.*

Diese Kontinuitätsgleichung hat als Konsequenz auch *globale Erhaltungssätze.* Sei Vein Volumen das groß genug ist, dass keine Ströme $\vec{j}_A$ durch seine Oberfläche fließen. Dann ist

$$\frac{d}{dt}A_V \equiv \frac{d}{dt}\int_V d^3r\ \rho_A(\vec{r},t) = 0$$

also ist A_V erhalten.

Ein Beispiel ist die Ladungserhaltung. In diesem Fall haben ρ und $\vec{j}$ keinen weiteren Index. Wir können rechnen mittels des Ampereschen Gesetzes.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) - \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \tag{1.7}$$

Zur Behandlung des ersten Terms nutzen wir eine Nablaidentität (diese sind für die Elektrodynamik ausgesprochen typisch). Es ist nämlich für beliebiges $\vec{B}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} = \sum_i \partial_i \sum_{j,k} \epsilon_{ijk}\partial_j B_k = 0. \tag{1.8}$$

Die letzte Identität ergibt sich daraus, dass für die Differentiationsreihefolge bei $\partial_i\partial_j$ irrelevant ist, d.h. wenn wir $i \leftrightarrow j$ tauschen und $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}$ berücksichtigen, heben sich diese Termpaare weg. Den zweiten Term in Gl. 1.7 formen wir mit der Maxwellgleichung 1.2 um und erhalten so

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho}{\epsilon_0} = -\dot{\rho}$$

und damit die gewünschte Kontinuitätsgleichung.

Manche Größen sind zwar in dem kombinierten System aus Feldern und Ladungen erhalten, aber nicht in den Feldern alleine, sprich, sie können hin- und her fließen. Wenn wir die Leistungsdichte (Energie/(Zeit mal Volumen)) f nennen, wobei positive Werte für die Erzeugung von Energie stehen, dann wird die erweiterte Kontinuitätsgleichung

$$\dot{\rho}_A + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_A = f_A.$$

In einem konkreten Beispiel wollen wir die Energie betrachten. Auf eine Probeladung q wirkt sich nur die elektrische Komponente der Lorentzkraft energieändernd aus. Die zugehörige Leistung ist $f_E = -\vec{j} \cdot \vec{E}$. Hieraus können wir die Energieerhaltung diskutieren, indem wir wiederum mit 1.5 operieren

$$-\vec{j} \cdot \vec{E} = -\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{B} \right) + \epsilon_0 \vec{E} \cdot \dot{\vec{E}}.$$

Der letzte Term kann als

$$\frac{d}{dt} \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2$$

geschrieben werden und liefert so einen Beitrag zur Energiedichte. Im letzten Term wenden wir die zyklische Identität des Spatproduktes an, dir für gewöhnliche Vektoren $\vec{A} \cdot \left(\vec{B} \times \vec{C} \right) = \vec{B} \cdot \left(\vec{C} \times \vec{A} \right)$ lautet. Wir müssen dabei aber die Produktregel der Differenziation beachten. Wir schreiben das am besten als

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{B} \times \vec{E} \right) = \vec{E} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{B} \right) - \vec{B} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} \right).$$

Damit können wir umformen

$$-\vec{j} \cdot \vec{E} = -\frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} \right) - \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{B} \times \vec{E} \right) + \frac{d}{dt} \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2.$$

Den ersten Term schreiben wir um mit Hilfe des Induktionsgesetzes und wir finden insgesamt

$$-\vec{j} \cdot \vec{E} = \dot{\rho}_E + \nabla \cdot \vec{S}.$$

Hier haben wir die Energiedichte

$$\rho_E = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2$$

sowie die Energistromdichte, genannt der Poynting-Vektor

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

eingeführt. Beachten Sie hier das Konstruktionsprinzip: Wir haben den Quellterm zerlegt in eine totale Zeitableitung und eine Divergenz, dies gibt uns die physikalischen Größen.

Wir tun jetzt das gleiche mit dem Impuls, einer Vektorgröße. Die Änderung des Impuls heißt Kraft und dementsprechend starten wir von der Dichte der Lorentzkraft aus der wir wie gehabt zunächst mittels der Maxwellgleichungen die Ladungen eliminieren

$$f_{\vec{p}} = -\rho \vec{E} - \vec{j} \times \vec{B} = -\epsilon_0 \vec{E} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \right) + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{B} \right) - \epsilon_0 \vec{B} \times \dot{\vec{E}}.$$

Hier können wir wiederum den Poynting-Vektor ins Spiel bringen mittels der Produktregel

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{B} \times \vec{E} \right) = \dot{\vec{B}} \times \vec{E} + \vec{B} \times \dot{\vec{E}} = -\left(\vec{\nabla} \times \vec{E} \right) \times \vec{E} + \vec{B} \times \dot{\vec{E}}$$

und im letzten Schritt noch das Induktionsgesetz. Wir setzen dies ein zusammen mit der nahrhaften (nach 2. Maxwellgleichung) Null $-\frac{1}{\mu_0}\vec{B}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right)$. Damit finden wir

$$f_{\vec{p}} = \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\vec{S}+\epsilon_0\vec{E}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)-\epsilon_0\vec{E}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)+\frac{1}{\mu_0}\vec{B}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)-\frac{1}{\mu_0}\vec{B}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right).$$

Hier ist $c=(\mu_0\epsilon_0)^{-1/2}$ die Lichtgeschwindigkeit. Wir haben jetzt schon erfolgreich eine Zeitableitung hingeschrieben, wie führen wir eine Divergenz ein? Hier müssen wir auch im Hinterkopf behalten, dass hier ein Vektor aus erhaltungssätzen (einer je Impulskomponente) steht. Wir hätten also gernde die Divergenz einer Matrix. Betrachten wir stellvertretend die x-Komponente

$$\begin{aligned}\left[\vec{\mathrm{E}}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}-\vec{E}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)\right]_x &= E_y\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_z - E_z\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)_y - E_x\sum_i\partial_i E_i\\ &= E_y\partial_x E_y - E_y\partial_y E_x - E_z\partial_z E_x + E_z\partial_x E_z -\\ &\quad -E_x\sum_i\partial_i E_i\\ &= \partial_x\left(\frac{E_y^2}{2}+\frac{E_z^2}{2}-\frac{E_x^2}{2}\right)-\partial_y\left(E_xE_y\right)-\partial_z\left(E_xE_z\right)\\ &= -\vec{\nabla}\cdot\left(E_x\vec{E}-\frac{1}{2}\hat{e}_x\vec{E}^2\right).\end{aligned}$$

Die anderen drei Komponenten können wir analog behandeln und erhalten die Erhaltungsgleichungen für die drei Impulskomponenten

$$-\rho\vec{E}-\vec{j}\times\vec{B}=\frac{1}{c^2}\dot{\vec{S}}-\vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{T}.$$

Die Matrix

$$T_{ab}=\epsilon_0\left(E_aE_b-\frac{1}{2}\delta_{ab}\vec{E}^2\right)+\frac{1}{\mu_0}\left(B_aB_b-\frac{1}{2}\delta_{ab}\vec{B}^2\right)$$

die die Komponenten des Stroms der Komponenten des Impulses beschreibt heißt *Maxwellscher Spannungstensor.*

1.5 Potenziale

Schon oben haben wir diskutiert, dass zwei der Maxwellgleichungen homogen sind. Wir führen jetzt eine Darstellung ein, die diese homogenen Gleichungen automatisch erfüllt. Dazu betrachten wir zunächst den Zerlegungssatz, der besagt, dass sich jedes Vektorfeld in ein quellenfreies Wirbelfeld und ein wirbelfreies Quallenfeld zerlegen lässt (Helmholtz-Zerlegung). Dazu betrachten wir ein beliebiges Vektorfeld $\vec{V}(\vec{r})$. Dieses stellen wir als Fourierintegral dar

$$\vec{V}(\vec{r})=\int d^3k\ \vec{V}\left(\vec{k}\right)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\quad \vec{V}\left(\vec{k}\right)=\int d^3r\ \vec{V}(\vec{r})\,e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}. \tag{1.9}$$

Wir zerlegen die Fouriertransformierte in eine longitudinale und eine transversale Komponente $\vec{V}\left(\vec{k}\right) = \vec{V}_{\|}\left(\vec{k}\right) + \vec{V}_{\perp}\left(\vec{k}\right)$. Diese sind

$$\begin{aligned}
\vec{V}_{\|}\left(\vec{k}\right) &= \vec{k}\frac{\vec{k}\cdot\vec{V}}{k^2} \\
\vec{V}_{\perp}\left(\vec{k}\right) &= -\frac{\vec{k}\times\left(\vec{k}\times\vec{V}\right)}{k^2}.
\end{aligned}$$

Nach der Fouriertransformation ist die Fourierdarstellung des Nabalaoperators gerade $i\vec{k}$ und so erkennen wir, dass $\vec{V}_{\|}$ gerade ein Gradientenfeld ist und $\vec{V}_{\perp}$ eine Rotation. Die Rotation eines Gradienten ist null und die Divergenz einer Rotation auch, was damit das Helmholtz-Theorem beweist. Dies ist nur ein Existenzbeweis der Zerlegung

$$\vec{W}\left(\vec{r}\right) = \vec{\nabla}\psi(\vec{r}) + \vec{\nabla}\times\vec{W}\left(\vec{r}\right)$$

wir werden später die mathematischen Werkzeuge zu haben, $\psi\left(\vec{r}\right)$ und $\vec{W}\left(\vec{r}\right)$ explizit zu konstruieren.

Mit dieser Zerlegung können wir jetzt die Mawellgleichungen vereinfachen. Wir starten mit der Quellenfreiheit des Magnetfeldes (1.3). Diese ist nach (1.8) automatisch erfüllt, wenn wir $\vec{B}$ als Rotation schreiben, was das Vektorpotenzial $\vec{A}$ definiert

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}. \tag{1.10}$$

Dies ist nicht eindeutig, aber gut genug. Insbesondere haben wir hier zwei eine skalare Differenzialgleichung für $\vec{B}$ berücksichtigt, aber trotzdem keine Parameter eliminiert - wir drücken die drei Komponenten von $\vec{B}$ durch die drei Komponenten von $\vec{A}$ aus. Die andere homogene Maxwellgleichung, das Induktionsgesetz (1.4) können wir so schreiben als

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{E}+\dot{\vec{A}}\right) = 0.$$

Wir können leicht analog zu (1.8)nachrechnen, dass daraus folgt, dass wir $\vec{E}+\dot{\vec{A}}$ als Gradienten schreiben können. Physikalisch folgt das aus dem Widerspruch zwischen den beim Gradienten diskutierten Wegintegralformel und dem Stokesschen Integralsatz - wenn die Rotation verschwindet muss das Integral wegunabhängig sein, also ein Gradientenfeld. Wir führen das skalare Potenzial ϕ nach Konvention so ein

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi\text{-}\dot{\vec{A}}. \tag{1.11}$$

Auch dies ist nicht eindeutig: Einerseits gibt es Integrationskonstanten, andereseits haben wir auch hier die drei Differenzialgleichungen von (1.4) dazu genutzt, aus drei Komponenten eine zu machen.

Die schon erwähnte Nichteindeutigkeit manifestiert sich folgendermaßen: Da die Rotation eines Gradienten stets verschwindet, können wir für ein beliebiges vernünftiges Skalarfeld $f(\vec{r}, t)$ die Transformation

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f \tag{1.12}$$

ohne dabei das Magnetfeld gemäß (1.10) zu verändern. Um das elektrische Feld Gl. (1.11) nicht zu verändern müssen wir auch transformieren

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \dot{f}.$$

Diese Transformationen heißen *Eichtransformationen.* Sie verdeutlichen dass, auch wenn wir später eher ϕ und $\vec{A}$ ausrechnen (und oftmals Intuition für sie entwickeln können), dies keine Observablen sind. Die Eichtransformation erlaubt es, an $\vec{A}$ und ϕ instesamt eine weitere Differenzialgleichung als Bedingung zu stellen. Dieses Prinzip heißt *Eichfreiheit.* Wir können diese Bedingung fordern ohne jedes mal die Eichfunktion f angeben zu müssen (was i.A. schwierig ist). Wir werden dies nicht in aller Finesse formal beweisen, die Idee aber skizzieren.

Populäre Eichungen sind

- die Coulombeichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ insbesondere vorteilhaft zur Behandlung und Quantisierung der Kopplung nichtrelativistischer Teilchen und das Feld
- die Lorenzeichung
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \tag{1.13}$$
zur Behandlung vo Strahlung und anderen relativistischen Phänomenen
- die Weyleichung $\phi = 0$

Wenn wir z.B. ein gegebenes $\vec{A}$ haben, dann folgt aus der Coulomb-Eichbedingung und der Transformationsgleichung (1.12) dass $\Delta f = -\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$. Zu vorgegebenem $\vec{A}$ ist diese Differenzialgleichung für f immer lösbar (wie wir in der Elektrostatik ausführlich behandeln werden).

Mit den Potenzialansätzen (1.10)(1.11) können wir die verbleibenden Maxwellgleichungen umschreiben. Das Coulomb-Gesetz (1.2) wird zu

$$\Delta \phi + \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{A}} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \tag{1.14}$$

Hier entmischen sich Skalar- und Vektorpotenzial wenn die Coulombeichung gewählt ist. Bei der Behandlung des Ampereschen Gesetzes betrachten wir zunächst

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) - \Delta \vec{A}.$$

Diese Identität lässt sich mit dem Entwicklungssatz für den Levi-Civita-Tensor leicht zeigen. Wir können sie und leichter verbal merken als “rotrot gleich graddiv minus divgrad”- Aus (1.5) wird so

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \ddot{\vec{A}} - \vec{\nabla} \left(\frac{1}{c^2} \dot{\phi} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) = -\mu_0 \vec{j}. \tag{1.15}$$

Die ersten beiden Terme können wir als $\Box\vec{A}$ zusammenfassen, wobei der d'Alembert (Quabla) Operator $\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ der typische Differenzialoperator der Wellengleichung ist. Diese Gleichungen (1.14)(1.15)werden in der Lorentz-Eichung Gl. (1.13) symmetrisch und sind respektive

$$\Box\phi = -\rho/\epsilon_0 \quad \Box\vec{A} = -\mu_0\vec{j}.$$

Dies soll uns als strukturelles Rüstzeug genügen - wir werden gegen Ende mehr über die globale Struktur der Maxwellgleichungen lernen, insbesondere ihre Symmetrien, wenn wir entdecken werden, dass sie zur Lorentzinvarianz und speziellen Relativitätstheorie führen. Jetzt wenden wir uns Techniken zu, die Maxwellgleichungen in wichtigen Situationen zu lösen.