Kapitel 3

Magnetostatik

3.1 Problemstellung

In der Magnetostatik betrachten wir das Magnetfeld $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, das von einer gegebenen zeitunabhängigen Stromverteilung $\vec{j}\,(\vec{r})$ produziert wird. Die Feldlinien sind nach Konstruktion alle geschlossen und aufgrund des statischen Charakters der Ausgangssituation ist das Amperesche Gesetz hier

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}.$$

Wir wählen die Coulombeichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. Wenn wir einsetzen und für die Doppelrotation die Identität (1.15)verwenden, dann garantiert diese Eichbedingung dass

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \tag{3.1}$$

das heißt dass die drei Komponenten des Vektorpotenzials automatisch auch eine Poissongleichung erfüllen und uns das Arsenal der Lösungsmethoden für Possoingleichungen, das wir in der Elektrostatik gelernt haben, zur Verfügung steht. Bevor wir in Multipole einsteigen möchten wir aber wieder hochsymmetrische Fälle anschauen.

3.2 Langer gerader Draht

Als Beispiel wollen wir uns das Magnetfeld eines langen geraden Drahtes anschauen, also eine Stromverteilung (in Zylinderkoordinaten) von $\vec{j} = I_0 \delta(r) \hat{e}_z$ wobei zu beachten ist, dass I_0 die Dimension Strom/Länge hat. Die Rotation in Zylinderkoordinaten ist

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \phi} - \frac{\partial B_\phi}{\partial z} \right) \hat{e}_r + \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial \mathrm{r}} \right) \hat{e}_\phi + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r B_\phi) - \frac{\partial B_r}{\partial \phi} \right) \hat{e}_z.$$

Um eine Rotation zu erhalten, die in z-Richtung zeigt und von r abhängt, setzen wir an $\vec{B} = B(r) \hat{e}_\phi$, also ein sich tangenzial um den Draht schraubendes

Magnetfeld (rechte Hand Regel). Wir betrachten jetzt eine Kreisscheibe $A = \{\vec{r}|z = z_0, r = r_0\}$. Wir wenden den Satz von Stokes auf diese Scheibe an und finden

$$\oint_{\partial A} d\vec{r} \cdot \vec{B} = 2\pi r_0 B\left(r_0\right) = \mu \int_A d^2 r I_0 \delta\left(r\right) = \mu_0 I_0$$

dies gibt uns sofort $B = \mu_0 I_0 / 2\pi r$.

3.3 Formale Lösung und Biot-Savart-Gesetz

Jetzt wollen wir explizit die Beziehung Gl. (3.1) nutzen. Die formale Lösung lautet, wie in der Elektrostatik

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \; \frac{\vec{j}\left(\vec{r}'\right)}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|}. \tag{3.2}$$

Daraus erhalten wir das Magnetfeld

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \; \vec{\nabla} \times \frac{\vec{j}\left(\vec{r}'\right)}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|}.$$

Wir nutzen die Nablaidentität $\vec{\nabla} \times \left(\phi \vec{F}\right) = \phi \vec{\nabla} \times \vec{F} - \vec{F} \times \vec{\nabla}\phi$. Da hier Nabla nach $\vec{r}$ differenziert spielt nur der zweite Term eine Rolle und wir finden

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \; \vec{j}\left(\vec{r}'\right) \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|^3}.$$

Dies nennen wir das Biot-Savartsche-Gesetz.

Wir wenden dies auf einen geraden Linieleiter endlicher Länge an, also eine Ladungsdichte $\vec{j} = I_0 \delta\left(r\right) \Theta\left(L - |z|\right) \hat{e}_z$. Wir erhalten

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \int_{-L}^{L} dz' \; \hat{e}_z \times \frac{r\hat{e}_r + \left(z - z'\right)\hat{e}_z}{\left(r^2 + \left(z - z'\right)^2\right)^{3/2}} = \frac{\mu_0 r}{4\pi} \hat{e}_\phi \int_{-L}^{L} dz' \frac{1}{\left(r^2 + \left(z - z'\right)^2\right)^{3/2}}$$

wobei wir bei der letzten Gleichung kurz inngehalten haben um uns davon zu überzeugen, dass $\hat{e}_\phi$ nicht von der Integrationsvariable abhängt. Damit können wir integrieren

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \hat{e}_\phi \left[\frac{L - z}{\sqrt{r^2 + \left(L - z\right)^2}} + \frac{L + z}{\sqrt{r^2 + \left(L + z\right)^2}}\right]$$

3.4 Magnetische Multipole

Wie in der Elektrostatik auch ist die Berechnung der Integrale im Biot-Savart-Gesetz bzw. im Vektorpotenzial sehr mühevoll. Wir greifen darum auf die Multipolentwicklung zurück.

3.4.1 Monopole?

Wir haben bereits gesehen, dass schon aufgrund der Vektorpotenzialstruktur magnetische Feldlinien keinen Anfang oder Ende haben. Wir wollen jetzt mathematisch zeigen, dass dies der Abwesenheit von Monopolen des Magnetfeldes äquivalent ist.

Die Monopolordnung des Vektorpotenzials Gl. (3.2) kann analog zur Elektrostatik (weit von der Ladungsverteilung) geschrieben werden

$$\vec{A}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int d^3r' \; \vec{j}\,(\vec{r}') \,. \tag{3.3}$$

Warum sollte dieses Integral im Allgemeinen verschwinden? Die Stromverteilung kann nicht vollkommen allgemein sein, im statischen Fall muss sie nach der Ladungserhaltung auch divergenzfrei sein $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$. Das riecht nach der Anwendung des Gaußschen Satzes, allerdings mit einem kleinen Umweg.

Wir benütigen ein Theorem für beliebige skalare Felder f und g mit dem wir berechnen

$$J = \int d^3r \; \left[f\,(\vec{r})\,\vec{j}\,(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla} g\,(\vec{r}) + f \leftrightarrow g \right] = \int d^3r \; \vec{j} \cdot \vec{\nabla}\,(fg)$$

wobei wir die Produktregel angewandt werden. Wir addieren eine nahrhafte Null und wenden noch einmal die Produktregel an

$$J = \int d^3r \; \left(\vec{j} \cdot \vec{\nabla}\,(fg) + fg\vec{\nabla} \cdot \vec{j} \right) = \int d^3r \; \vec{\nabla} \cdot \left(fg\vec{j} \right).$$

Jetzt können wir ausnutzen, dass wir über ein Volumen integrieren, das groß genug ist so dass alle Ströme darin eingeschlossen sind und nichts hinein-oder herausfließt. Das erlaubt die Anwendung des Gaußschen Satzes

$$J = \int_{\partial V} d^2r \; fg \left(\hat{n} \cdot \vec{j} \right) = 0. \tag{3.4}$$

Diese Identität, die wie gerade gesagt voraussetzt dass das Integrationsvolumen groß genug und $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ ist, werden wir jetzt mehrfach nutzen. Damit können wir z.B. die x- Komponente von Gl. (3.3) vereinfachn, indem wir $f = 1$ und $g = x$ setzen. Damit ist

$$J = \int d^3r \; \vec{j} \cdot \vec{\nabla} x = \int d^3r \; j_x = 0 \tag{3.5}$$

Die anderen Komponenten können analog behandelt werden und wir haben $\vec{A}_0 = 0$. Die Monopolordnung der Multipolentwicklung für Magnetfelder verschwindet.

3.4.2 Der magnetische Dipol

In weitere Analogie zur Multipolentwicklung in der Elektrostatik haben wir

$$\vec{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \int d^3r' \; (\hat{e}_r \cdot \vec{r}\,') \, \vec{j}\,(\vec{r}\,')\,.$$

Wir nutzen eine neue Variante der Identität (3.4) um diesen Ausdruck zu vereinfachen. Wir setzen $f = r_i$ und $g = r_j$ also zwei beliebige Komponenten des Ortsvektors. Damit können wir zeigen

$$J = \int d^3r' \left(r'_i j_j + r'_j j_i\right) = 0. \tag{3.6}$$

Damit können wir für einen beliebigen Vektor $\vec{a}$ zeigen, dass

$$K_a = \vec{a} \cdot \int d^3r' \; \vec{r}\,' j_i = \sum_j a_j \int d^3r' \; r'_j j_i.$$

Wir teilen das Integral jetzt in zwei gleiche Hälften auf und nutzen Gl. (3.6) für

$$K_a = -\frac{1}{2} \sum_j a_j \int d^3r' \left(r'_i j_j - r'_j j_i\right) = \frac{1}{2} \int d^3r' \left(\vec{r}\,' \times \vec{j}\right) \times \vec{a}.$$

Wenn wir also $\vec{a} = \vec{r}$ setzen erhalten wir für das Vektorpotenzial in der statischen Dipolordnung den Ausdruck

$$\vec{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}.$$

Hier ist das magnetische Dipolmoment gerade

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int d^3r \; \vec{r} \times \vec{j}\,(\vec{r})\,. \tag{3.7}$$

Daraus ergibt sich als Feld

$$\vec{B}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\,(\hat{e}_r \cdot \vec{m})\,\hat{e}_r - \vec{m}}{r^3}$$

was ganz analog zum elektrischen Feld eines elektrischen Dipols ist.

Wir wollen eine gewisse Intuition für das Integral entwickeln. Dazu nehmen wir an, dass wir einen Stromfaden haben, der in einer Ebene entlang eienr Kurve parameterisiert als $\vec{r}(s)$ läuft. Es sei $\vec{t}$ der Tangenteinheitsvektor an die Kurve an einem gegebenem Punkt das heißt das Differenzial entlang der Kurve ist $d\vec{r} = \vec{t} ds$. Damit können wir *lokal* an jedem Ort das Differenzial aufteilen in eine Integration senkrecht und eine parallel zum Draht

$$d^3r = d\vec{f} \cdot d\vec{s} = df\,ds.$$

In einem Stromfaden ist die senkrechte Integation einfach, sie überführt die Stromdichte (Strom pro Fläche) in Stromstärke. Damit ist $\vec{j}d^3r = Id\vec{r}$. Damit lässt sich das magnetische Dipolmoment schreiben als

$$\vec{m} = \frac{I}{2}\int \vec{r} \times d\vec{r} = I\vec{A}$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass das Integral entlang einer geschlossenen ebenen Kurve gerade deren Fläche ergibt. Eine generelle Merkregel ist also, dass magnetische Dipole Stromschleifen entsprechen.

Als Beispiel für diese Technik betrachten wir das Moment einer kreisförmigen Stromschleife in der xy- Ebene um den Ursprung. Nach unserer Formel ist dieses $\vec{m} = \pi r^2 I$.

Zu Fuß sieht das so aus: DIe Stromdichte ist

$$j\left(\vec{r}\right) = \frac{I}{R}\delta\left(r - R\right)\delta\left(\cos\theta\right)\hat{e}_\phi.$$

Damit ist

$$\vec{m} = \frac{I}{2R}\int d^3r\, r\delta\left(r-R\right)\delta\left(\cos\theta\right)\hat{e}_r \times \hat{e}_\phi = \frac{I}{2}R^2\int d\phi\ \left.\left(\hat{e}_r \times \hat{e}_\phi\right)\right|_{\theta=\pi/2} = I\pi R^2\hat{e}_z$$

in Übereinstimmung mit unserem obigen Ergebnis. Bei Integralen dieser Art - räumliche Integrale über Vektoren in Kugelkoordinaten - ist immer darauf zu achten, dass die Einheitsvektoren selbst koordinatenabhängig sind. Darum sollte der Integrand am besten zuerst in kartesische Koordinaten umgeschrieben werden.

Dies beendet unsere kurze Diskussion der Magnetostatik. Wir werden im Kapitel über Materialien im elektromagnetischen Feld kurz auf Rand- und Anschlussbedingungen zurückkommen.