Kapitel 7

Spezielle Relativitätstheorie

Zu Beginn der Vorlesung haben wir einige Grundeigeschaften der elektromagnetischen Theorie kennengelernt. Wir haben uns aber noch nicht mit den Transformationen beschäftigt, unter denen Elektromagnetismus invariant ist - die Symmetrien der Theorie. Wechsel von Bezugssystemen und Studium von Symmetrien liefert Erhaltungsgrößen und hilft, durch geschickte Wahl von Bezugssystemen bestimmte Problemstellungen zu durchdringen. Symmetrie ist insofern eines der wichtigsten Prinzipien der theoretischen Physik.

7.1 Zusammenbruch der Gallileiinvarianz

In der klassischen Mechanik haben Sie gelernt, dass die gängige Form der Newtonschen Bewegungsgleichungen gallileiinvariant sind, d.h. ihre Struktur ändert sich nicht unter einer Gruppe (im mathematischen) Sinn von Gallileitransformationen. Die interessanteste von ihnen ist der Gallilei-Boost

$$t \to t' = t \quad \vec{r} \to \vec{r}' = \vec{r} + \vec{v}t \tag{7.1}$$

der eng verknüpft ist mit dem Relativitätsprinzip das besagt, dass die Naturgesetze in allen Inertialsystemen die gleichen sind.

Für den Elektromagnetismus haben wir gesehen, dass sich aus den Maxwellgleichungen eine Wellengleichung $\Box\psi(\vec{r},t) = 0$ ableiten lässt. Unter der Gallileitransformation ist klarerweise $\Box' = \Box$. Wenn wir in ψ gestrichene Koordinaten einsetzen und die Wellengleichung anwenden, oBdA für einen Boost in z-Richtung, dann sehen wir

$$\Box\psi(\vec{r} + v\hat{e}_z t, t) = \Delta\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(v\frac{\partial\psi}{\partial z} + \dot{\psi}\right) = \Box\psi - \frac{v^2}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - 2\frac{v}{c}\frac{\partial\dot{\psi}}{\partial z}.$$

Es entstehen bei der Gallilei-Transofmration also neue Terme, die Wellengleichung ist *nicht* gallileiinvariant. Das ist konsistent damit, dass sich Geschwindigkeiten nach Gl. (7.1) transformieren nach $\dot{\vec{r}} \to \dot{\vec{r}}' = \dot{\vec{r}} + \vec{v}$. Da aus der Wellengleichung eine Phasengeschwindigkeit c definiert, müsste diese sich auch entsprechend transformieren (und richtungsabhängig werden) - genau das tut die oben hergeleitete Transformation - aber dann ist die Wellengleichung nicht mehr die Wellengleichung. In vielen Fällen von Wellenausbreitung, z.B. der Akustik, ist das natürlich, da die Wellen ein Medium brauchen, um sich auszubreiten. Die Wellengleichung in ihrer einfachsten Form gilt dann nur im Ruhesystem des Mediums, das Relativitätsprinzip ist gebrochen. Eine Reihe von Experimenten, das bekannteste die Michelson-Morley-Interferometrie, die Sie wahrscheinlich schon aus der Experimentalphysik-Vorlesung kennen, schließen aus, dass es ein solches Medium (genannt "Äther") gibt, d.h. für elektromagnetische Wellen scheint das Relativitätsprinzip intakt zu sein - damit bleibt die Gallilei-Transformationsregel als Kandidat für Korrektur.

Dies wurde schon sehr früh erkannt. Zunächst wurde der Mangel an Gallileiinvarianz als Argument gegen die Gültigkeit der Maxwell-Theorie ins Feld gebracht. Raumzeitliche Transformation die statt der Gallileitransformation die Form der Wellengleichung erhalten heißen Lorentztransformationen (und werden später genauer diskutiert). Einstein hat erkannt, dass diese Transformationen nicht auf den Elektromagnetismus beschränkt sind, sondern generell die Struktur von Raum und Zeit in nicht-beschleungiten Bezugssystemen beschreiben - die spezielle Relativitätstheorie. Darum heißt seine berühmte Veröffentlichung der speziellen Relativitätstheorie "Zur Elektrodynamik bewegter Körper"

Wir werden zuerst einen intuitiven grafischen Zugang zur speziellen Relativität wählen, der auf Mermin's Buch *It's about time* beruht. Dann werden wir uns der Theorie formal nähern und abschließend relativistische Dynamik und Elektrodynamik behandeln.

7.2 Grundideen der Relativitätstheorie

Die spezielle Relativitätstheorie behält das Relativitätsprinzip, das besagt dass alle Naturgesetze (einschließlich der Wellengleichung des Lichts mit Lichtgeschwindigkeit c) in Intertialsystemen gelten - diese können sich mit konstanter Geschwindigkeit gegeneinander bewegen. Ebenso gehört dazu, dass der Raum translations-, zeittranslations- und rotationsinvariant ist. Wir suchen jetzt Transformationsregeln zwischen Intertialsystemen, die die Gallileitransformation als Grenzfall haben. Wir werden sehen, dass die Crux für eine solche Transformation darin liegt, dass die auch die Zeit vom Bezugssystem abhängt.

7.2.1 Geschwindigkeitsaddition

Wir betrachten in diesem Abschnitt eindimensionale Bewegung und starten mit einem Gedankenexperiment: Alice bewegt sich in einem Personenzug mit Geschwindigkeit v und wirft einen Ball in Fahrtrichtung. Ein Beobachter am Bahnstein sieht den Ball mit einer Geschwindigkeit w. Nichtrelativistisch, nach den Regeln der Gallilei-Transformation, wäre $w = u + v$. Wir werden uns in diesem

Abschnitt davon überzeugen, dass in Wirklichkeit

$$w = \frac{u+v}{1+\frac{u}{c}\frac{v}{c}} \tag{7.2}$$

ist. Wir sehen diesem Ausdruck an, dass er unserer Regel folgt: Wenn $u \to c$ geht dann ist $w = \frac{v+c}{1+\frac{v}{c}} = c$ also ist die Lichtgeschwindigkeit im mitbewegten Bezugssystem die gleiche. Außerdem gilt im Fall $u, v \ll c$ die nichtrelativistische Geschwindigkeitsaddition.

Was bedeutet die Messung einer Geschwindigkeit? Sie basiert auf der Messung der Zeit, die ein Objekt braucht um eine Meßstrecke gegebener Länge zu durchqueren. Dies bringt aber das Problem mit sich, dass wir uns auf die Synchronisation von Uhren in verschiedenen Bezugssystemen einigen können - und das können wir nicht, wie wir später noch sehen werden. Wir können aber das Licht, dessen Geschwindigkeit wir in allen Bezugssytemen kennen, als Maßstab nehmen - als eine garantiert in jedem Inertialsystem zuverlässige Uhr.

Zur Geschwindigkeitsmessung müssen wir beachten, dass wir uns wiederum nicht auf synchronisierte Uhren verlassen. Stattdessen gehen wir wie folgt vor: Ball und Lichtblitz starten gleichzeitig in die gleiche Richtung. Der Lichtblitz wird nach einem Abstand L reflektiert und läuft wieder zurück auf den Ball zu. Wenn sich Ball und Lichtblitz wieder am gleichen Ort treffen, wird das Experiment gestoppt. Der Absolutwert von L darf aber auch keine Rolle spielen. Stattdessen zählen wir einfach Striche auf einem Maßstab ab und arbeiten mit Anteilen der Gesamtlänge. Wenn sich Ball und Lichtblitz nach einem Anteil f des Zuges treffen, hat der Lichtblitz $1 + f$ Einheiten zurückgelegt, der Ball nur f . Damit ist seine Geschwindigkeit $u = c\frac{1-f}{1+f}$. Dies können wir rumdrehen zu

$$f = \frac{c-u}{c+u}. \tag{7.3}$$

Jetzt betrachten wir das gleiche Gedankenexperiment vom Bahnsteig. Wieder starten der Lichtblitz und der Ball gleichzeitig in die gleiche Richtung (in der auch der Zug fahren soll), auch sonst läuft das Experiment gleich ab - Warten auf Begegnung, Zählen von Markierungen. Wir führen zwar Längen und Zeiten ein, kürzen diese aber im Endergebis wieder heraus. Wir nehmen an, der Lichtblitz braucht eine Zeit T_0 um am Spiegel anzukommen und eine zusätzliche Zeit T_1 um bei einem Längenanteil von f den Ball zu treffen. L soll die Länge des Zuges sein und D der Abstand zwischen Spiegel und Ball in dem Augenblick, in dem das Licht reflektiert wird. Damit lässt sich D durch die Geschwindigkeitsdifferenz ausdrücken als

$$D = (c - w)T_0$$

Bis zum Ende des Experiments muss noch einmal die Strecke D zwischen Ball und Blitz aufgeteilt werden, diesmal entgegengesetzt

$$D = (c + w)T_1.$$

Dies erlaubt die Elimination von D zu

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{c-w}{c+w}.$$

Andererseits legt können wir ähnliche Beziehungen für die Reise zum vom Start zum Spiegel aufstellen, $L = (c-v)T_1$. Für die zweite Etappe zum Objekt legt der Lichtblitz $fL = (c+v)T_1$ zurück. Damit finden wir

$$\frac{T_1}{T_0} = f\frac{c-v}{c+v}.$$

Damit können wir auflösen

$$f = \frac{c+v}{c-v}\frac{c-w}{c+w}.$$

In Kombination mit Gl. (7.3) und elementarer Algebra erhalten wir Gl. (7.3), die relativistische Geschwindigkeitsaddition. Diese garantiert, dass alle Geschwindigkeiten kleiner als c sind und sie gilt auch bei umgekehrten Vorzeichen, also gegenläufiger Bewegung.

7.2.2 Relativität der Gleichzeitigkeit

Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystem widerspricht unserer Intuition - wir können Widersprüche konstruieren zwischen gleichzeitigen Ereignisse in unterschiedlichem Abstand, zwischen denen Licht trotzdem immer mit der gleichen Geschwindigkeit reisen muss, es sei denn, wir erkennen an, dass die Zeit auch von der Wahl des Bezugssystems abhängt.

Um dies zu erfassen definieren wir ein Ereignis als einen Punkt $(t, \vec{r})$ in Zeit und Raum. Solange wir nur eindimensionale Bewegungen betrachten können wir jedem Ereignis damit einen Punkt in der Ebene zuordnen. Das Vergleichen bzw. Synchronisiren von Uhren muss man jetzt genauer anschauen - wenn Uhren an verschiedenen Orten sind wird zwischen ihnen ja Licht mit konstanter Geschwindigkeit c ausgetauscht, d.h. eine genaue Synchronisation ist nur am gleichen Ort möglich. Diese problematische Synchronisation kann mit folgendem Trick umgangen werden: Um zwei Ereignisse im mitgewegten Bezugssystem als gleichzeitig zu kennzeichnen sendet Alice in der Mitte des Zuges Lichtblitze nach beiden Seiten aus. Wenn diese Punkte das jeweilige Ende des Zuges erreichen, wird dort ein Punkt auf den Gleisen markiert. Diese Ereignisse sind in Alice's Bezugssystem gleichzeitig. Auch Bob auf dem Bahnsteig sieht Lichtblitze, die sich mit konstanter Geschwindigkeit in beide Richtungen bewegen, da sich aber der Zug bewegt während diese erlauben, ist die Ankunft der Lichtblitze nicht mehr gleichzeitig - Gleichzeitigkeit hängt also vom Bezugssytem ab! Wird dies zum Synchronisieren von Uhren verwendet, so denkt Alice die Uhren an den Zugenenden seien synchron, Bob jedoch denkt sie sind es nicht.

Quantitativ können wir das wie folgt analysieren: Die Ankunftszeit am Zugende, T_r, ist gegeben durch die Weglänge, die der Zug sich während des Experiments fortbewegt hat, also

$$cT_r = \frac{L}{2} - vT_r.$$

Analog haben wir für die Ankunft vorne im Zug, T_f den Ausdruck

$$cT_f = \frac{L}{2} + vT_f.$$

Der Zeitunterschied ist damit

$$cT = v\left(T_r + T_f\right).$$

Wir würden gerne die Summe $T_r + T_f$ eliminieren. Dies ist die Zeit, die Licht braucht um im Bezugssystem des Bahnsteigs zwsichen beiden Markierungen zu reisen. Haben diese den Abstand D dann haben wir damit

$$T = \frac{vD}{c^2}.$$

Hier ist wichtig, dass sowohl T als auch D im Bahnsteig gemessen wurden, also im gleichen Bezugssystem.

7.2.3 Zeitdilatation und Längenkontraktion

Gerade haben wir gesehen, dass die Gleichzeitigkeit von Ereignissen vom Bezugssystem abhängt. Was hat das für Auswirkungen auf den Zeitablauf in einer bewegten Uhr? Betrachten Sie hierzu unser vorheriges Gedankenexperiment (symmetrisch auslaufende Lichtblitze). Wir wissen, dass der Zeitabstand T_A zwischen zwei Uhren auf dem Zug gegeben ist über deren im Zug gegemessenen Abstand L_A gemäß $T_A = L_A v/c^2$. Umgekehrt gilt für den Abstand zweier Uhren auf dem Gleis, gesehen vom Zug $T_B = D_B v/c^2$.Wir interessieren und für das Verhältnis T_A/T_B. Eng verknüft damit ist die Längenkontraktion, also das Verhältnis von Eigenlänge - dem Abstand zwischen zwei Punkten gemessen in deren Ruhesystem. Wir bezeichnen Zuglängen mit L und Längen auf dem Gleis mit D. Aufgrund des Relativitätsprinzips muss gelten

$$\frac{L_B}{L_A} = \frac{D_A}{D_B}.$$

Aufgrund der Versuchsanordnung, mit der die Gleise markiert werden, ist außerdem $L_A = D_A$. Wie sieht es aus Sicht des Beobachters auf dem Gleis aus? Der Abstand D_B besteht aus der Länge des Zuges plus des fehlenden Stücks, also

$$D_B = L_B + vT_B. \tag{7.4}$$

Damit haben wir, was wir brauche. Einerseits ist das Verhältnis der Zeiten gleich dem der Längen, wie oben gesagt ist

$$\frac{T_A}{T_B} = \frac{L_A}{D_B} = \frac{D_A}{D_B} = \frac{L_B}{L_A} \equiv s.$$

Dies setzen wir jetzt in Gleichung (7.4) ein und erhalten

$$D_B = L_B + D_B \frac{v^2}{c^2} \quad \Rightarrow \quad L_B = D_B \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right).$$

Jetzt nutzen wir, dass $L_B = sL_A = sD_A = s^2 D_B$ und erhalten

$$s = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Wir sehen leicht, dass $0 < s < 1$ ist und damit bewegte Uhren lansamer laufen und bewegte Stäbe kürzer werden - Zeitdilatation und Längenkontraktion. Sie können sich fragen, wie es sein kann, dass aus Sicht des Zuges das gleiche unter umgekehrten Vorzeichten gilt - dies liegt an der Relativität der Gleichzeitigkeit. Wir werden das späte am Paradox der sieben relativistischen Schwaben genauer durchleuchten.

7.2.4 Ablesen bewegter Uhren

Wir haben im vorhergegangenen Abschnitt gezeigt, das bewegte Uhren langsam laufen. Aber was würden wir sehen, wenn wir eine solche Uhr (optisch natürlich) betrachten? Der Einfachheit halber nehmen wir eine selbstleuchtende Uhr an, d.h. Licht wird nicht reflektiert sondern von der Uhr ausgestrahlt. Wir sehen, dass neben der Zeitdilatation hier die Bewegungsrichtung eine Rolle spielen muss - wenn sich die Uhr von uns wegbewegt, dann muss das Licht bei jeder Ablesung einen längeren Weg zurücklegen und die Uhr erscheint langsamer, wenn sie sich auf uns zubewegt dann erscheint sie schneller - das ist der (relativistische) Dopplereffekt. Die genauere Analyse wird uns eine alternative Herleitung des Wertes von s liefern.

Wir betrachten eine periodisch aufblinkende Uhr mit Periode T in ihrem eigenen Ruhesystem gemessen. Wenn sich die Uhr von uns wegbewegt ändert sich diese Zeit um einen Faktor f_a

$$f_a T = \frac{T}{s} \left(1 + \frac{v}{c}\right).$$

Analog gilt für die Bewegung der Uhr auf uns zu

$$f_t T = \frac{T}{s} \left(1 - \frac{v}{c}\right).$$

Wir betrachten jetzt eine Situation in der wir zwischen zwei Systemen hin- und wieder zurücktransformieren. Es seien Alice und Bob im gleichen Bezugssytem aber an verschiedenen Orten. Zwischen ihnen bewege sich Carol von Alice in Richtung Bob. Carol sieht Blitze von Alice im Abstand $f_a T$ und sendet sie weiter. Bob empfängt sie im Abstand$f_t f_a T = T$ wobei letztere Gleichheit gilt, weil bei instantanen Reflexen von Carol dieser Blitz gleichzeitig mit dem Original ankommt. Damit ist $f_a f_t = 1$. Mit den obigen Gleichungen erhalten wir damit

$$1 = \left(1 + \frac{v}{c}\right)\left(1 - \frac{v}{c}\right)\frac{1}{s^2}$$

was uns den gleichen Wert für s wie oben liefert. Die Faktoren f_a und $f_s$skalieren die Periode von ausgesandten Wellen beim Dopplereffekt uns sind damit

$$f_{t/a}=\sqrt{\frac{1\mp\frac{v}{c}}{1\pm\frac{v}{c}}}.$$

Diese unterscheiden sich vom akustischen Dopplereffekt, bei dem ja ein ruhendes Medium die Wellen trägt, das es im Elektromagnetismus nicht gibt.

7.2.5 Der Abstand zwischen Ereignissen

Wir haben bereits ein "Ereignis" als einen Punkt in der Raumzeit definiert. Wir wollen uns überlegen, ob wir etwas über Ereignisse aussagen können, das in allen Bezugssystemen gleich ist. Die einzige Möglichkeit, dies zu etablieren ist es, einen Lichtstrahl zwischen zwei Ereignissen zu benutzen. Die Zeiten und Abstände, die dieser zurücklegt, werden vom Bezugssystem abhängen, aber in jedem System ist $D = cT$. Da dies nicht vom Vorzeichen abhängt. Wenn zwischen zwei Ereignissen also $(cT)^2 - D^2 = 0$ in einem Bezugssytem ist, dann gilt das in allen Bezugssytemen. Solche Abstände nennt man *lichtartig.* Wir werden im folgenden zeigen, dass für zwei allgemeine Ereignisse das Intervvall

$$I^2 = (cT)^2 - D^2$$

konstant ist. Vorher wollen wir diese Größe etwas näher diskutieren. Sei $I^2 > 0$. Dann bewegt sich das Objekt in einem gewählten Bezugssystem mit der konstanten Geschwindigkeit $v = D/T < c$. Wir können in ein entsprechend mitbewegtes Bezugssystem wechseln. In diesem ist die Zeit zwischen den Ereignissen

$$T_0 = sT = T\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Damit ist $c^2T_0^2 = c^2T^2 - v^2T^2 = (cT)^2 - D^2 = I^2$. Da es also ein physikalische erlaubtes Bezugssytem gibt, in dem sich die Ereignisse am gleichen Ort befinden und wir nur Zeit verstreichen lassen müssen, heißen solche Abstände *zeitartig.*

Jetzt betrachten wir den Fall $I^2 < 0$. Hier müsste sich das mitbewegte Bezugssystem mit Überlichtgeschwindigkeit bewegen, was unmöglich ist. Wir können aber analog zeigen (Hausaufgabe) dass es ein Bezugssystem gibt, in dem die Ereignisse gleichzeitig sind, solche Abstände nennt man dann *raumartig.* Zwischen raumartig getrennten Ereignissen kann keine Kommunikation stattfinden, da deren Geschwindigkeit auf die Lichtgeschwindigkeit begrenzt ist.

Mit diesen Überlegungen haben wir auch gezeigt, dass I^2 unabhängig vom Bezugssystem ist. Wir können von jedem gleichförmig bewegten Bezugssystem in das transformieren, in dem das Intervall rein zeitlich bzw. rein räumlich ist, ohne das Intervall zu ändern - wenn wir eine solche Transformation ausführen und dann das inverse einer anderen, dann haben wir transformiert ohne D zu ändern.

Dieses invariante Intervall kann geometrisch interpretiert werden und führt zur Minkowski-Geometrie. In gewöhnlicher Geometrie in kartesischen Koordinaten können wir, wenn wir uns um Abstände x_0 bzw. y_0 fortbewegen den Gesamtabstand zu $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$. Wenn wir dies mit der Definition von I vergleichen, dann sehen wir einmal, dass einer der "Abstände" als cT geschrieben wird. Dies ist letztlich aber nur eine Maßeinheitenkonversion. Schwerwiegender ist, das Minuszeichen auf der rechten Seite. Der Abstand wird also nicht diagonal aufgetragen, sondern entlang einer der kartesischen Achsen, auf der Diagonalen ist immer die Zeit. Außerdem kann der quadrierte Abstand negativ werden. Wir werden uns später genauer mit dieser Minkowski-Geometrie der Raumzeit beschäftigen.

7.2.6 Sich begegnende Züge

Hier wollen wir diskutieren, wie sich die von uns bisher gefundenen relativistischen Effekte auf die unterschiedliche Synchronisierung von Uhren zurückführen lassen. Wir betrachten hier zwei sich an einem Bahnsteig begegnende Züge bei denen jeder Waggon eine Uhr trägt. Klarerweise zeigen diese Uhren aus Sicht des Bahnsteigs unterschiedliche Zeiten an, und der Unterschied wächst je weiter wir entlang des Zuges schreiten. Jetzt versuchen Beobachter in einem Zug etwa die Geschwindigkeit des anderen Zuges durch Ablesen von dessen Uhren zu bestimmen. Mehr Details zu diesem Problem werden in den Übungen behandelt.

7.2.7 Raumzeit-Diagramme

Bisher haben wir die wichtigsten Konzepte der speziellen Relativitätstheorie anhand von generischen Beispielen von bewegten Bezugssystemen gefunden und dabei verschiedene zeitliche Schnappschüsse des Gedankenexperiments angefertigt und vergliche. Wir wollen jetzt zweidimensionale Raum-Zeit-Diagramme (Minkowski-Diagramme) konstruieren und Regeln aufstellen, die die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit implementieren und es uns erlauben, relativistische Effekte und Paradoxe geometrisch zu erfassen. Wir beschränken uns weiterhin auf eindimensionale Bewegung. Wir wählen zunächst ein spezielles Intertailsystem (Alices) aus. Alice repräsentiert Ereignisse in ihrem System durch einen Punkt an deren Raum-Zeitkoordinate. Ausgehend von einem ersten Ereigniss zeichnet Alice Geraden gleichen Ortes (Equilocs[1]). Die Richtung der ersten Equiloc ist beliebig (und kann der Orientierung des Papiers) angepasst werden. Andere Equilocs müssen dann parallel dazu verlaufen (denn sonst würden sie sich ja irgendwann treffen). Außerdem zeichnet Alice maßstabsgetreu, d.h. der Abstand der Equilocs ist proportional zum realen Abstand in ihrem Ruhesystem. Analog kann sie Geraden mit gleichzeitigen Ereignissen zeichnen, Equitemps. Diese sind nicht parallel zu den Equilocs sondern schließen einen Winkel mit ihnen ein. Die Equitemps sind untereinander parallel und ihr Abstand ist proportional zu c mal dem Zeitabstand. Um die Lichtgeschwindigkeit bequem ablesen zu

[1] Equiloc und Equitemp sind nicht Teil des verbreitesten Jargons in der Relativiätstheorie, hier aber sehr praktisch

können empfiehlt es sich, den Abstand der Equilocs und und Equitemps so zu wählen, z.B. könnten sie jeweils 1 cm außeinander sein und dies könnte einer Zeit von 1 ns bzw. $c \cdot 1$ ns außeinander sein, was knapp 30 cm ist (oder nach Mermin ein relativistischer Fuß). Damit teilen die Equilocs und die Equitemps die Ebene in Rauten auf.

In diesem Diagramm können wir jetzt die Bewegung eines punktförmigen Objektes $x(t)$ aufzeichnen als *Weltlinie.* Die Weltlinie von Licht bewegt sich dabei entlang den (i.a. nicht gleich langen) Diagonalen er Rauten, diese Diagonalen heißen darum *Lichtkegel.* Die beiden Orientierungen des Lichtkegels sind dabei stets aufeinander senkrecht, folgend den Eigenschaften von Diagonalen einer Raute. Außerdem schließen sie stets den gleichen Winkel mit Equitemps und Equilocs von Alice (bzw. jedem anderen Inertialsystem) ein.

Jetzt betrachten wir ein gleichförmig dazu bewegtes Bezugssystem mit Beobachter Bob. Bob bewegt sich gleichförmig auf einer zeitartigen Achse relativ zu Alice. Nach Konstruktion ist diese Achse ein equiloc von Bob und wir können wiederum parallel dazu weitere Equilocs malen, indem wir einfach das geeignete Parallelogramm in Alices Koordinaten abstecken. Je schneller sich Bob relativ zu Alice bewegt, desto größer wird der Winkel von Bobs zu Alices Equilocs.

Jetzt wollen wir Bobs Equitemps festlegen - das ist die erste Stelle an der wir das Relativitätsprinzip bzw. die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit nutzen. Dazu führen wir eine geometrische Konstruktion zur Relativität der Gleichzeitigkeit durch. Dazu zeichnen wir drei von Bobs Equilocs mit jeweils dem gleichen Abstand zum Nachbarn. Von der mittleren, die die Mitte des Zuges repräasentiert, zeichnen wir den Lichtkegel - dessen Richtung wir kennen, denn er ist in jedem Bezugssystem der gleiche. Er schneidet die äußeren Equilocs in je einem Punkt, die nach Konstruktion auf einer Equitemp von Bob liegen, deren Richtung wir hiermit etabliert haben. Da Bob die gleichen Punkte für Ereignisse benutzen will, wie Alice, werden Zeiten und Abstände mithilfe des Lichtkegels gemessen.

Als erstes überzeugen wir uns über die Relativität der Gleichzeitigkeit. Wir zeichnen Ereignisse $E_{0/1/2}$ für Bob so dass E_0 und E_1 auf einer Equitemp für Bob liegen und E_0 und E_1 auf einer Equitemp. Der Winkel an E_0 wir also vom Lichtkegel in der Mitte geteilt. Dazu zeichnen wir Equiloc und Equitemps für Alice durch E_0, auch mit dem gleichen Lichtstrahl als Winkelhalbierende, aber mit einem größeren Öffnungswinkel. Nachdem wir jetzt die Richtungen von Alices Equilocs und Equitemps für Alice haben, können wir solche auch durch E_1 und E_2 legen. Entlang dieser können wir den räumlichen Abstand d und die zeitliche t abtragen - ihr Verhältnis ist gerade das Verhältnis der Seiten des entsprechenden Parallelogramms. Wir wissen, wie schnell sich Bob bewegt und so ist $d = vt$. Wenn wir das jetzt spiegeln, dann sehen wir dass aus Sicht von Alice $T = vD/c^2$. Wobei wir genutzt haben, dass wir Zeiten durch c skalieren.

Für die Längenkontraktion und die Zeitdilatation müssen wir herausfinden, wie sich die Skalenfaktoren ineinander umrechnen. Später werden wir zeigen, dass das Produkt der Skalenfaktoren vom Bezugssystem unabhängig ist.

Zunächst gehen wir ohne dies vor und überzeugen uns, wie eine mitbewegte Stange in einem anderen Bezugssystem eine andere Länge haben kann, wie ins-

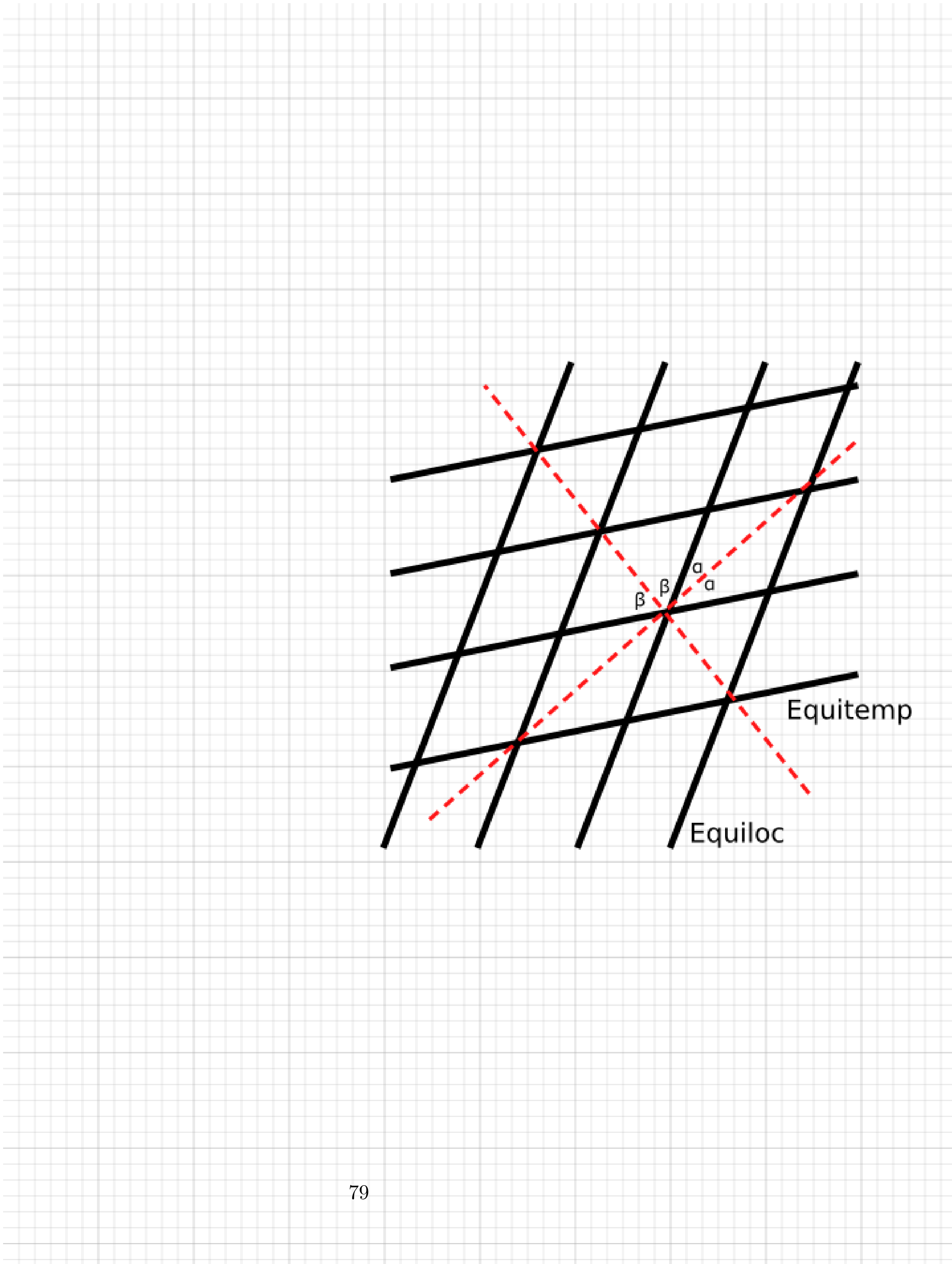

Abbildung 7.1: Zur Konstruktion von Lichtkegel in Raumzeit-Diagrammen.

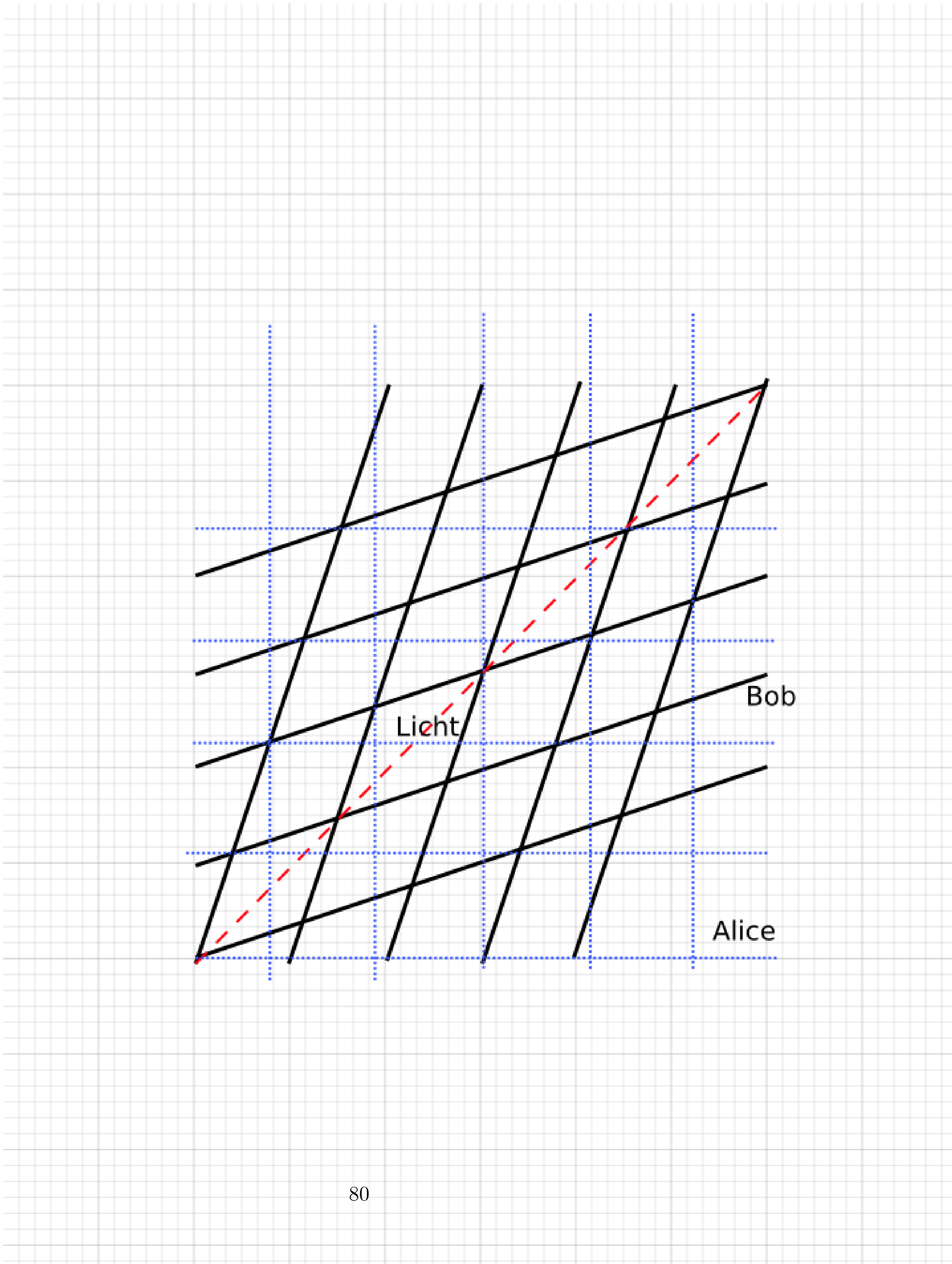

Abbildung 7.2: Zur Konstruktion eines mitbewegten Koordinatensystem

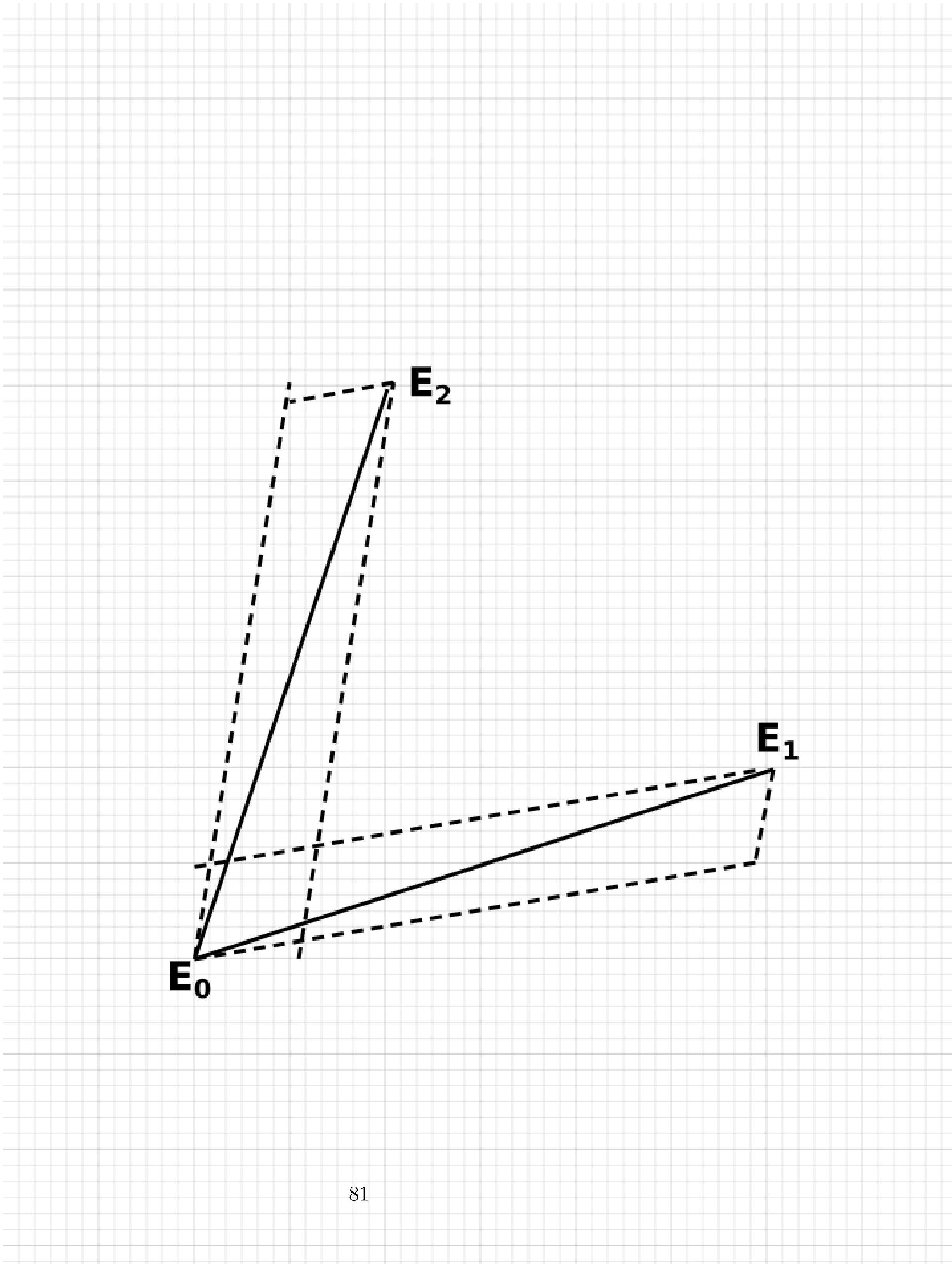

Abbildung 7.3: Zur Relativität der Gleichzeitigkeit

besondere je nach Bezugssystem jeweils ein anderer von zwei Stäben länger als der andere sein kann. Wir zeichnen die Weltlinien des ersten Stabes als vertikale Linien, das sind dann auch Equitemps in seinem eigenen Ruhesystem, die Equilocs sind entsprechend horizontal. Der sich vorbei bewegende Stab wird durch seine Equilocs gekennzeichnet und nach der Winkelhalbierenden-Regel zeichnen wir auch eine Equitemps.

Wir sehen jetzt dass bei geeigneter Wahl von Parametern die Reihenfolge der Kreuzungen zwischen den Weltlinien der Stabenden unterschiedlich ist zwischen den Equitemps der beiden Bezugssysteme. Analog können wir die Zeitdilatation behandeln. Dies überspringen wir und wenden uns gleich dem Zwillingsparadox zu: Zwei Uhren starten am gleichen Ort und sind synchronisiert, die Uhr kann z.B. das biologische Altern von Zwillingen sein. Jetzt wird eine Uhr auf eine Rakete gesetzt und fliegt mit hoher Geschwindigkeit los, sie scheint also aus Sicht der anderen Uhr sehr schnell zu sein und läuft dementsprechend langsamer. Bei der Rückkehr müsste sie also langsamer gelaufen zu sein, als die stationäre Uhr. Andereseits könnte man das gleiche für einen Beobachter der Uhr auf der Rakete sagen - die andere Uhr scheint langsamer zu laufen. Das ist paradox, weil beim wieder-Zusammentreffen der beiden Uhren je nach Szenario nicht klar ist, welche Uhr schneller ist.

Die Paradoxie löst sich dadurch auf, dass man einsieht, dass die Bezugssysteme nicht äquivalent sein können: Um sich zunächst auseinanderbewegen und dann wieder zusammenzukommen muss Beschleunigung im Spiel sein. Im Extremfall kehrt die bewegte Uhr um, d.h. sie wird in einem Punkt unendlich beschleunigt. Diesem wollen wir uns jetzt widmen. Interessant ist hier nicht nur die Frage wie groß der Unterschied am Ende ist, sondern was das Ablesen der Uhr des jeweils anderen Bezugssystems ergibt. Wir sehen im Raumzeit-Diagamm, dass in der ersten Bewegungsphase tatsächlich die jeweils andere Uhr langsam zu sein scheint. Beim Umkehren ändert sich jedoch die Lage der Equitemps der Rakete und es wird schlagartig eine deutlich spätere Zeit abgelesen. Der darauf folgende langsamere Ablauf der Zeit gleicht dies nicht aus.

Hiermit schließen wir die grafische Behandlung der speziellen Relativitätstheorie und wenden uns ihrer kompakten mathematischen Formulierung zu.

7.3 Mathematische Formulierung

7.3.1 Invariantes Wegelement

Die definierende Eigenschaft der richtigen Transformation zwischen Bezugssystemen (also der, die die Maxwellgleichungen erhält bei konstantem c) Das bedeutet, dass der Abstand Δr der von Licht im Zeitraum Δt zurücklegt die Gleichung

$$c^2\Delta t^2 - \Delta r^2 = 0$$

erfüllt und zwar unabhängig vom Bezugssystem. Jetzt wollen wir den Abstand von zwei allgemeinen Ereignissen

$$s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta r^2$$

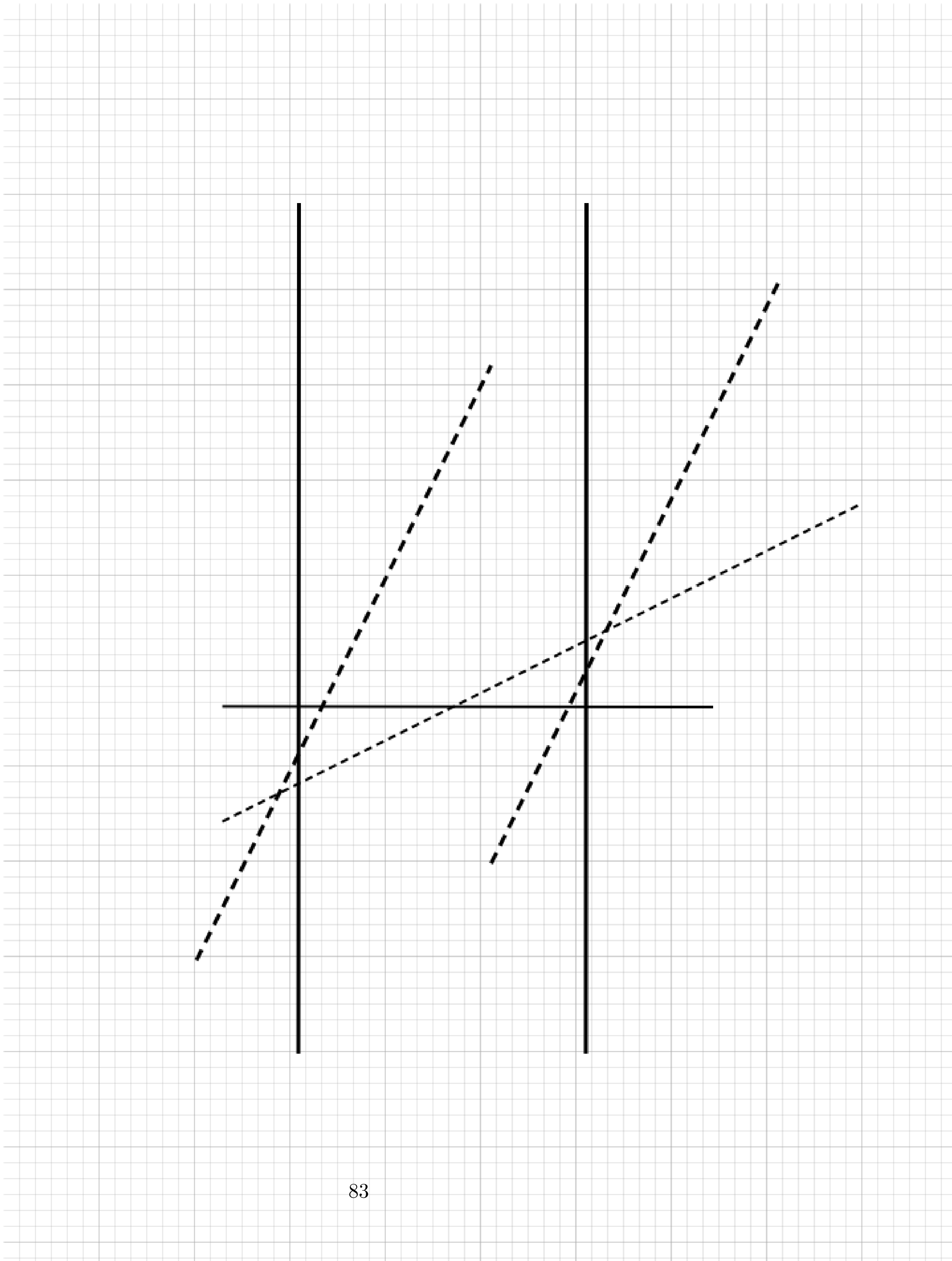

Abbildung 7.4: Beispiel Raumzeit-Diagramm für Längenkontraktion

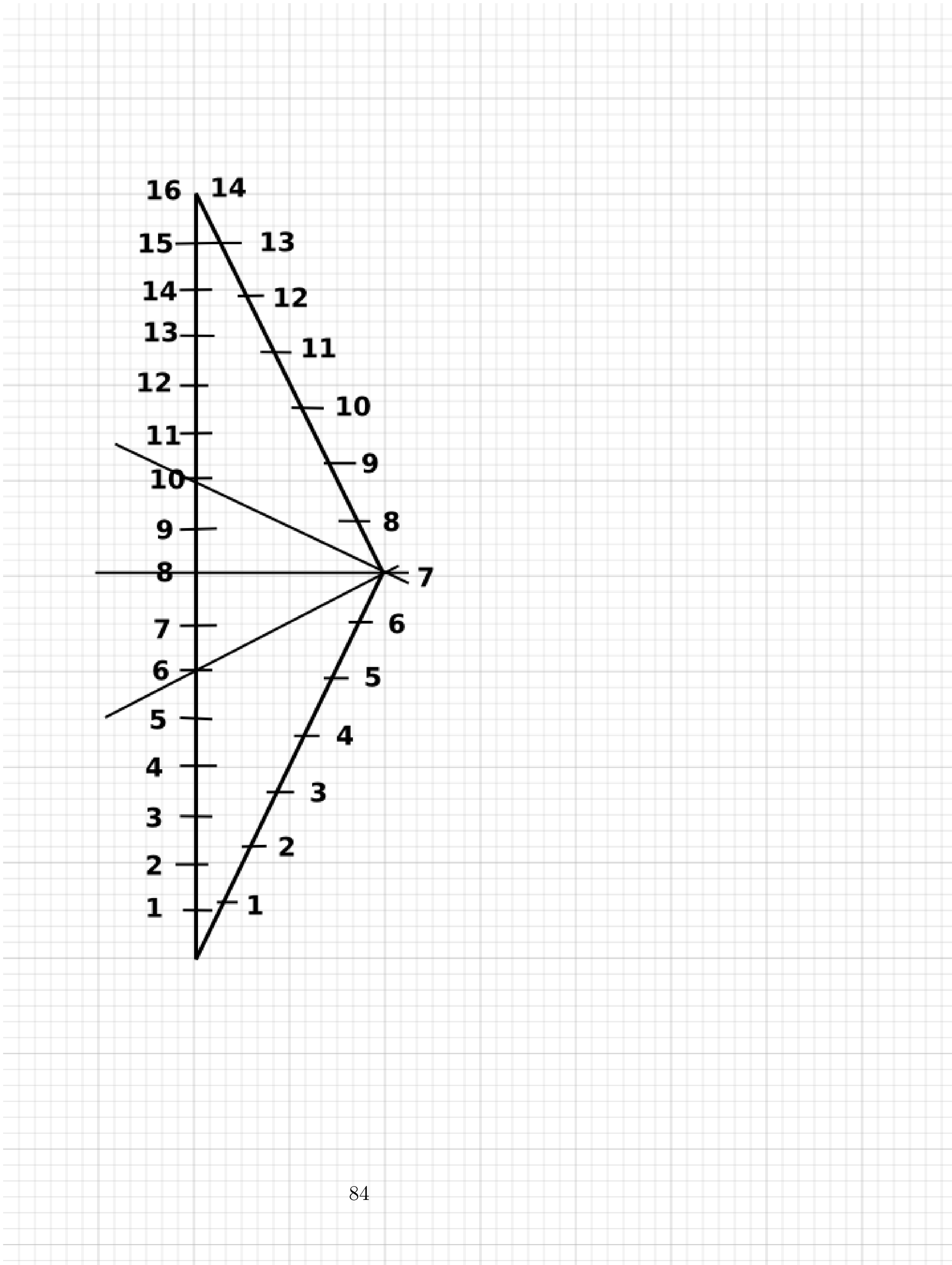

Abbildung 7.5: Weltlinien und Beobachtungsrichtungen für das Zwillingsparadox