besondere je nach Bezugssystem jeweils ein anderer von zwei Stäben länger als der andere sein kann. Wir zeichnen die Weltlinien des ersten Stabes als vertikale Linien, das sind dann auch Equitemps in seinem eigenen Ruhesystem, die Equilocs sind entsprechend horizontal. Der sich vorbei bewegende Stab wird durch seine Equilocs gekennzeichnet und nach der Winkelhalbierenden-Regel zeichnen wir auch eine Equitemps.

Wir sehen jetzt dass bei geeigneter Wahl von Parametern die Reihenfolge der Kreuzungen zwischen den Weltlinien der Stabenden unterschiedlich ist zwischen den Equitemps der beiden Bezugssysteme. Analog können wir die Zeitdilatation behandeln. Dies überspringen wir und wenden uns gleich dem Zwillingsparadox zu: Zwei Uhren starten am gleichen Ort und sind synchronisiert, die Uhr kann z.B. das biologische Altern von Zwillingen sein. Jetzt wird eine Uhr auf eine Rakete gesetzt und fliegt mit hoher Geschwindigkeit los, sie scheint also aus Sicht der anderen Uhr sehr schnell zu sein und läuft dementsprechend langsamer. Bei der Rückkehr müsste sie also langsamer gelaufen zu sein, als die stationäre Uhr. Andereseits könnte man das gleiche für einen Beobachter der Uhr auf der Rakete sagen - die andere Uhr scheint langsamer zu laufen. Das ist paradox, weil beim wieder-Zusammentreffen der beiden Uhren je nach Szenario nicht klar ist, welche Uhr schneller ist.

Die Paradoxie löst sich dadurch auf, dass man einsieht, dass die Bezugssysteme nicht äquivalent sein können: Um sich zunächst auseinanderbewegen und dann wieder zusammenzukommen muss Beschleunigung im Spiel sein. Im Extremfall kehrt die bewegte Uhr um, d.h. sie wird in einem Punkt unendlich beschleunigt. Diesem wollen wir uns jetzt widmen. Interessant ist hier nicht nur die Frage wie groß der Unterschied am Ende ist, sondern was das Ablesen der Uhr des jeweils anderen Bezugssystems ergibt. Wir sehen im Raumzeit-Diagamm, dass in der ersten Bewegungsphase tatsächlich die jeweils andere Uhr langsam zu sein scheint. Beim Umkehren ändert sich jedoch die Lage der Equitemps der Rakete und es wird schlagartig eine deutlich spätere Zeit abgelesen. Der darauf folgende langsamere Ablauf der Zeit gleicht dies nicht aus.

Hiermit schließen wir die grafische Behandlung der speziellen Relativitätstheorie und wenden uns ihrer kompakten mathematischen Formulierung zu.

7.3 Mathematische Formulierung

7.3.1 Invariantes Wegelement

Die definierende Eigenschaft der richtigen Transformation zwischen Bezugssystemen (also der, die die Maxwellgleichungen erhält bei konstantem c) Das bedeutet, dass der Abstand Δr der von Licht im Zeitraum Δt zurücklegt die Gleichung

$$c^2 \Delta t^2 - \Delta r^2 = 0$$

erfüllt und zwar unabhängig vom Bezugssystem. Jetzt wollen wir den Abstand von zwei allgemeinen Ereignissen

$$s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta r^2$$

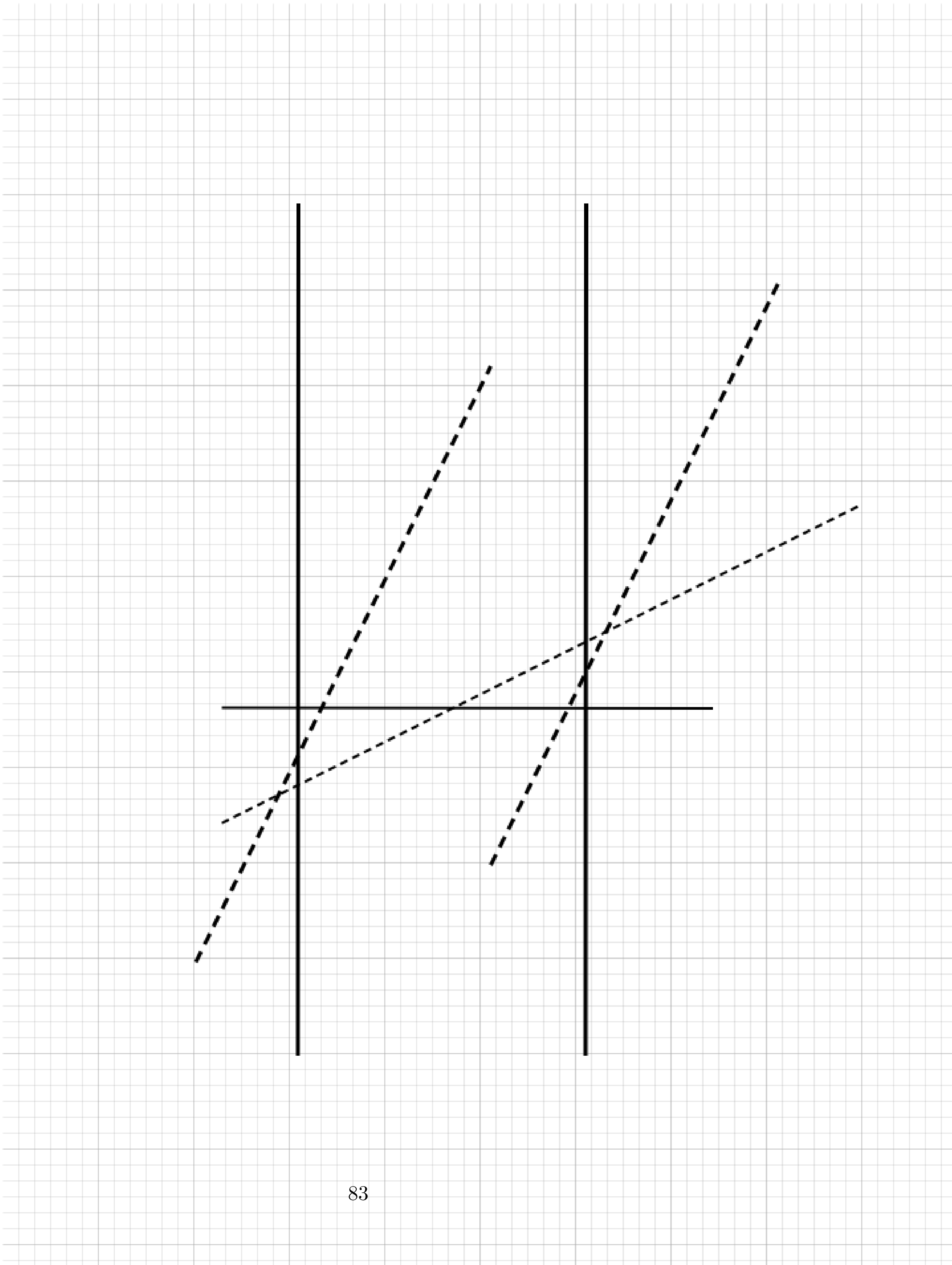

Abbildung 7.4: Beispiel Raumzeit-Diagramm für Längenkontraktion

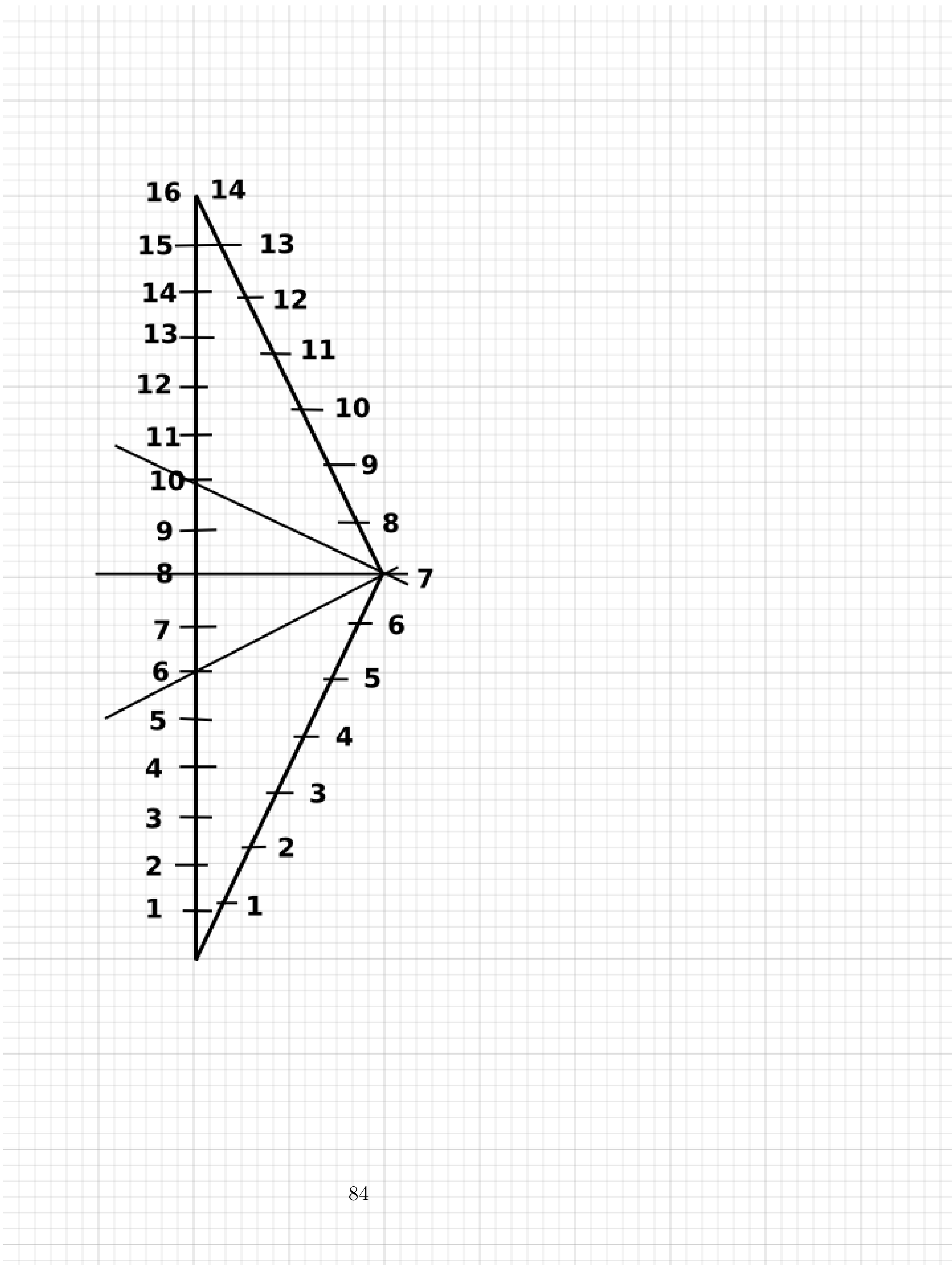

Abbildung 7.5: Weltlinien und Beobachtungsrichtungen für das Zwillingsparadox

anschauen, der nicht unbedingt verschwinden muss. Entsprechend haben wir für Ereignisse in infinitesimalem Abstand

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2.$$

Wir wollen jetzt eine Transofrmation in ein anderes Bezugssystem betrachten. Diese soll stetig sein in dem Sinn, dass auch ds'^2 infinitesimal von der gleichen Ordnung ist, wie ds^2 und wie schon oben gesagt impliziert $ds^2 = 0$ auch $ds'^2 = 0$. Damit bleibt, dass eine Funktion α existieren muss so dass

$$ds^2 = \alpha ds'^2 \tag{7.5}$$

sein muss. Wovon kann α abhängen? Für eine Reihe simpler Transformationen (Drehungen, Spiegelung, Translationen, Zeittranslationen) ist $\alpha = 1$. Interessanter sind die Boosts, also Transformationen zwischen gleichförmig gegeneinander bewegten Bezugssystemen. Da die Länge isotrop ist, kann α nur vom Betrag, nicht aber der Richtung der Geschwindigkeit abhängen. Betrachten wir jetzt drei Bezugssysteme. Von unserem Ruhesystem aus bewegen sich die zwei anderen mit Geschwindigkeit $\vec{v}_1$ bzw. $\vec{v}_2$. Die beiden anderen Bezugssysteme bewegen sich relativ mit $\vec{v}_{21} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$. Hier ist zu beachten, dass auch bei konstanten Geschwindigkeitsbeträgen v_1 und v_2 der Betrag v_{21} von der relativen Orientierung dieser beiden Geschwindigkeiten abhängt. Damit können wir aus Gl. (7.5) auf verschiedene Transformationsschritte anwenden wie folgt:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \alpha(v_1)\, ds_1^2 = \alpha(v_2)\, ds_2^2 \\ ds_1^2 &= \alpha(v_{12})\, ds_2^2 \\ \alpha(v_{12}) &= \frac{\alpha(v_2)}{\alpha(v_1)} \end{aligned}$$

wobei die dritte Gleichung aus den ersten beiden folgt. Dort steht rechts ein Ausdruck, der von der relativen Orientierung der beiden Geschwindigkeiten unabhängig ist, während der links im Allgemeinen davon abhängt. Das ist nur möglich, wenn α eine konstante Funktion ist und wiederum die dritte Gleichung sagt uns, dass diese Konstante 1 sein muss. Also gilt $ds^2 = ds'^2$ Integration über infinitesimale Elemente ergibt die generelle Invarianz des Abstandes $s^2 = s'^2$. Dies haben wir schon im vorherigen Teil diskutiert und zeit- und raumartige Abstände einfgeführt. Wir können jetzt für die Gruppe der physikalischen Transformationen zwischen Bezugssystemen, den Lorentztransformationen, die definierende Eigenschaft angeben: Sie lassen s^2 invariant.

7.3.2 Notation

Klar ist, dass Boosts erfordern werden, dann Zeit und Raum mischen, was wir ja schon vorher unter der Relativität der Gleichzeitigkeit diskutiert haben. Darum wollen wir Raum und Zeit in einen einzigen Vektor zusammenfassen gemäß

$$x^\mu = (ct, x, y, z)\,.$$

Für Vierervektoren dieser Art werden wir eine Lorentztransformation entwickeln - wir nennen sie kontravariante Vektoren (bzw. kontravariante Komponenten eines Ereignisses). Zuweilen interessieren uns auch die kovarianten Kompontenten, die wir durch einen unteren Index kennzeichnen

$$x_\mu = (ct, -x-, y-z)\,.$$

Wir nutzen ab jetzt die Einsteinsche Summationskonvention die besagt, dass über Indizes die sowohl ko- als auch kontravatiante Komponenten beschreiben, summiert wird, also z.B. ist

$$x_\mu x^\mu = s^2.$$

Eine Größe, die darauf ohne Indizes da steht, heißt Lorentzskalar und ist definiert als eine Größe, die sich durch Lorentztransformation nicht ändert. Das definiert damit implizit die Transformationsregeln für die kovarianten Komponenten. Da wir s^2 als Abstand zwischen Ereignissen interpretieren wird hierdurch eine Metrik auf der Raumzeit definiert. Dies können wir durch den metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$ ausdrücken. Dieser dient der Umwandlung zwischen ko- und kontravarianten Komponenten nach$x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu$. Außerdem gibt es natürlich einen metrischen Tensor für die Gegenrichtung, $x^\mu = g^{\mu\nu}x_\nu$. Vergleich mit den Definitionen verdeutlicht dass $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$ und $g_{00} = 1$, $g_{ii} = -1$ (lateinische Indizes laufen hier immer von $1\ldots 3$ sowie für $\mu \neq \nu$ $g_{\mu\nu} = 0$.

7.3.3 Lorentztransformation

Wie schon vorher gesagt ist die Erhaltung des invarianten Abstands die definierende Eigenschaft der Lorentztransformation. Wir drücken diese Transformation durch den gemischten (eine Komponente ko- eine kontravariant) Tensor Λ_μ^ν aus gemäß

$$x^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu.$$

Welche Lorentztransformationen gibt es? Zunächst mal sind sämtliche Isometrien des Raumes, also Verschiebung, Drehung und Spiegelung, Lorentztransformationen, da sie räumliche Abstände invariant lassen und die Zeit nich berühren. Ebenso ist eine zeitliche Verschiebung eine Lorentztransformation. Interessanter ist der Lorentzboost. ObdA schauen wir uns die Transformation in ein sich gleichförmig mit der Geschwindigkeit v entlang der $x-$ Achse bewegendes Bezugssystem an. In Matrixform ausgeschrieben und nur auf die ct und x-Komponenten konzentriert haben wir

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_0^0 & \Lambda_1^0 \\ \Lambda_0^1 & \Lambda_1^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}.$$

Wir fordern einerseits, dass im Limes geringer Geschwindigkeiten $v \ll c$ die Gallileitransformation herauskommt, also $\Lambda_0^0, \Lambda_1^1 = 1 + O\left(v/c\right), \Lambda_0^1 = -1 + O(v/c)$ und $\Lambda_1^0 \in O(v/c)$. Andererseits muss $(ct')^2 - x'^2 = (ct)^2 - x^2$ sein. Letztere Bedindung führt zu

$$\begin{aligned} \left(\Lambda_0^0\right)^2 - \Lambda_1^0\Lambda_0^1 &= \left(\Lambda_1^1\right)^2 - \Lambda_1^0\Lambda_0^1 = 1 \\ \Lambda_1^0\Lambda_0^0 - \Lambda_1^1\Lambda_0^1 &= \Lambda_0^0\Lambda_1^0 - \Lambda_0^1\Lambda_1^1 = 0 \end{aligned}$$

dies sind vier nichtlineare Gleichungen für vier Unbekannte. Diese werden automatisch erfüllt durch den Ansatz

$$\Lambda^0_0 = \Lambda^1_1 = \cosh\eta \quad \Lambda^1_0 = \Lambda^0_1 = \text{-}\sinh\eta.$$

Der hier eingeführte Parameter, die Rapidität η, muss jetzt die Geschwindigkeit beschreiben. Wir beschreiben die Bewegung des Ursprungs des bewegten Bezugssystems $x' = 0$ also $x = vt$. Einsetzen in die Transformationsgleichungen liefert

$$0 = \Lambda^1_0 ct + \Lambda^1_1 vt \ \Rightarrow \eta = \text{Artanh}\left(\frac{v}{c}\right).$$

Damit können wir unter Benutzung von Additionstheorem für Hyperbelfunktionen den Lorentzboost entlang x ausschreiben als

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad ct' = \frac{ct - xv/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Da die Wahl der x-Achse für den Boost letztlich willkürlich war, schreiben wir dieses Resultat jetzt noch für allgemeine Richtungen um. Dazu führen wir noch die Notation $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$ ein und schreiben als

$$t' = \gamma\left(1 - \frac{\vec{v}\cdot\vec{r}}{c^2}\right) \quad \vec{r}'_{\parallel} = \gamma\left(\vec{r}_{\parallel} - \vec{v}t\right) \quad \vec{r}'_{\perp} = \vec{r}_{\perp}.$$

Hierbei sind

$$\vec{r}_{\parallel} = \frac{\vec{r}_{\parallel}\cdot\vec{v}}{v} \quad \vec{r}_{\perp} = \vec{r} - \vec{r}_{\parallel}$$

die Komponenten des Ortsvektors parallel bzw. senkrecht zur Geschwindigkeit.

7.3.4 Ableitungen

Wie verhalten sich Ableitungen unter Lorentztransformationen. Wir betrachten einen beliebigen Lorentzskalar $f(x^\mu)$ und sein vollständiges Differenzial, das ebenfalls ein Skalar ist

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} dx^\mu.$$

Damit ist die Bildung der Ableitung nach kontravarianten Komponenten ein kovarianter Vektor. Wir schreiben darum auch $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ sowie $f_{,\mu} = \partial_\mu f$. Als Merkregel können wir sagen, dass der obere Index nach unten rutscht, weil er im Nenner steht. Dies erlaubt uns die Definition einer Viererdivergenz $\partial_\mu v^\mu$ das, wie wir später sehen werden, eine Kontinuitätsgleichung ist.

7.3.5 Eigenzeit und Vierergeschwindigkeit

Die Weltlinie, die wir schon vorher eingeführt haben, beschreibt die vollständige Kinematik eines Teilchen im Vierdimensionalen Raum. Im entlang der Weltlinie bewegten Bezugssystem ist das Teilchen stationär, d.h. $ds^2 = c^2 d\tau^2$. Die Zeit τ

nennen wir Eigenzeit und wir haben gerade gezeigt, dass sie ein Lorentzskalar ist - damit sind zeitabhängige Prozesse im Ruhesystem eines schnellen Teilchens klar geregelt. Wenn wir jetzt in ein anderes, mit Geschwindigkeit v bewegtes Bezugssystem transformieren, dass können wir $d\tau$ ausdrücken als

$$d\tau = \frac{ds}{c} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt'.$$

Dies können wir hochintegrieren zu

$$\tau_2 - \tau_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Da τ ein Lorentzskalar ist, können wir es auch nutzen, um einen Vektor der Vierergeschwindigkeit definieren

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{(c, \vec{v})}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Interessanterweise ist $u_\mu u^\mu = c^2$ - in der vierdimensionalen Raumzeit bewegt sich also alles mit Lichtgeschwindigkeit.

7.3.6 Relativistische Dynamik

Wir betrachten zunächst freie relativistische Teilchen. Die Wirkung muss ein Lorentzskalar sein. Der einzige, den wir bislang kennen, ist ds also setzen wir an

$$S = -\alpha \int_{t_1}^{t_2} ds$$

mit einer noch zu bestimmenden Proportionalitätskonstante α. Diese bestimmen wir durch die Anforderung, dass im Grenzfall geringer Geschwindigkeit die klassische Mechanik herauskommt. Damit haben wir

$$S = -c\alpha \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = -c\alpha (t_2 - t_1) + c\alpha \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{v^2}{2c^2} + O\left(\frac{v^4}{c^4}\right).$$

Damit muss $\alpha = mc$ sein und wir haben als Lagrangefunktion $\mathcal{L} = -mc\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Daraus können wir den Impuls schreiben als

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i} = \gamma m v_i.$$

Dies können wir umformen zu

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{\sqrt{m^2 + p^2/c^2}}$$

und die Hamiltonfunktion

$$H(\vec{r},\vec{p}) = \vec{v}\cdot\vec{p} - \mathcal{L}\left(\vec{r},\vec{v}\left(\vec{r},\vec{p}\right)\right) = \frac{p^2}{\sqrt{m^2+p^2/c^2}} + mc\sqrt{1-\frac{p^2/c^2}{m^2+p^2/c^2}} = \sqrt{(mc^2)^2+(pc)^2} -$$

Damit haben wir die relativistische Energie-Impulsrelation (auch eine Art Dispersionsrelation) gefunden und mit ihr die berühmteste Formel der Physik: Für Teilchen in Ruhe, $p = 0$ ist $E = mc^2$. Für kleine Impulse, $p \ll mc$ haben wir $H = mc^2 + \frac{p^2}{2m} + O\left(\frac{p}{mc}\right)$. Für hohe Impulse haben wir eine Relation analog zu der ebener Wellen, $H = pc + O\left(\frac{mc}{p}\right)$.

Wir sehen, dass für die drei Raumkomponenten des relativisitischen Impulses in der Tat $\vec{p} = m\vec{v}$ ist. Damit ist es sinnvoll, den Viererimpulsvektor als $p^\mu = mu^\mu$ zu definieren. Interessant ist die zeitliche Komponente

$$p^0 = mu^0 = m\gamma = H/c$$

die also die Energie repräsentiert.

7.3.7 Relativistische Lorentzkraft

Wir haben in einer der ersten Übungen gesehen, dass die Lagrangefunktion eines geladenen Teilchen im nichtrelativistischen Limes die Form

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + q\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A} - q\phi$$

hat. Die relativistische Verallgemeinerung verändert einerseits die kinetische Energie des freien Teilchen wir wir schon gesehen haben, andererseits nutzen wir die Vierergeschwindigkeit. Die Wirkung ist

$$S = -\int\left(mc^2 + qu^\mu A_\mu\right)d\tau.$$

Diese Darstellung betont, dass es sich um einen Lorentzskalar handelt. Wir haben hier die elektromagnetischen Potenziale als Vierervektor $A^\mu = \left(\phi/c,\vec{A}\right)$ geschrieben - das elektromagnetische Feld koppelt an die Materie also einfach bilinear, dies nennt man *minimale* Kopplung. Mit dieser Schreibweise können wir Eichtransformationen leicht schreibe als $A^{\mu'} = A^\mu + \partial^\mu f$. Da wir die Euler-Lagrange-Gleichungen nicht so einfach auf ein Integral über die Eigenzeit τ anwenden können, gehen wir schrittweise vor

$$\delta S = -\int\left[mc\ \delta ds + qA_\mu\delta dx^\mu + q\delta A_\mu dx^\mu\right]$$

Da $ds = \sqrt{dx^\mu dx_\mu}$ ist, ist $\delta ds = \frac{dx_\mu}{ds}\delta dx^\mu$ (hier haben wir genutzt, dass dx^μ und dx_μ keine unabhängigen Variablen sind, sondern durch den metrischen

Tensor miteinander verbunden sind. Wir integrieren außerdem die beiden ersten Terme parziell und erhalten

$$\delta S = \int [mc\ du_\mu \delta x^\mu + q\ dA_\mu \delta x^\mu - q\delta A_\mu\ dx^\mu]$$

Wir variieren hier aber nicht die Felder (dies ist eine Rechnung der relativistischen *Mechanik* , die Variation von A_μ geschieht nur indirekt über die Variation der Weltlinie x^ν. Also ist

$$\delta S = \int \left[mc\ du_\mu \delta x^\mu + q\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \delta x^\mu - q\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \delta x^\nu dx^\mu \right].$$

Jetzt haben wir es fast geschafft. Wir wollen sowohl die Variationen als auf die Differenziale auf eine einheitliche Form bringen. Dazu tauschen wir im letzten Term die kontrahierten Indizes μ und ν und schreiben

$$du_\mu = \frac{du_\mu}{ds} ds \quad dx^\mu = u^\mu ds.$$

Dies ergibt

$$\delta S = \int \left[mc\frac{du_\mu}{ds} - qF_{\nu\mu} u^\nu \right] \delta x^\nu ds.$$

Wir haben den elektromagnetischen Feldtensor als eine Art vierdimensionaler Rotation definiert als

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Dieser Tensor ist klarereweise antisymmetrisch, $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$. Demzufolge muss auch $F_{\mu\mu} = 0$ sein. Die Bewegungsgleichung, die sich aus dem Variationsprinzip (das das Verschwinden der Variation von S unter jeder Variation der Weltlinie fordert) ergibt ist damit

$$mc\frac{du^\mu}{d\tau} = qF^{\mu\nu} u_\nu.$$

Wir können den Feldtensor ausschreiben als

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Am Ende kommt im nicht relativistischen Limes die bekannte Lorentzkraft heraus. Wir sehen hier, dass elektrische und magnetische Felder in einem einzigen Tensor zweiter Stufe vereinigt sind.

7.3.8 Relativistische Elektrodynamik

Nachdem wir im vorherigen Abschnitt die Dynamik von Materie in Feldern relativistisch betrachtet haben, wenden wir uns jetzt der relativistischen Notation der Maxwellgleichungen zu. Da der Ausgungspunkt unserer Diskussion der speziellen Relativitätstheorie die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit war, ändern sich die Gleichungen durch die Relativität nicht, sie werden nur anders notiert. Klar ist, in der jetzt kompakt als $\partial_\alpha A^\alpha = 0$ geschrieben werden kann die Potenziale weiterhin die inhomogene Wellengleichung erfüllen. Deren linke Seite lässt sich kompakt als $\partial_\mu \partial^\mu A^\nu$ schreiben. Was ist mit der rechten Seite? Nun, da die elektrische Ladung (Punktladung oder das Integral über ein Teilchen) ein Lorentzskalar sein muss, also $dq = \rho dV$ können wir schreiben

$$dq dx^\nu = \rho dV dx^\nu = \rho dV dt \frac{dx^\nu}{dt}.$$

Da ganz links ein Lorentzvektor steht und $dV dt$ genau wie ds ein Skalar ist, muss der Viererstrom $j^\nu = \rho dx^\nu/dt = \left(\rho c, \vec{j}\right)$ ein Vektor. Wir können damit leicht verifizieren, dass das Viererpotenzial erfüllt

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \mu_0 j^\nu.$$

Daraus können wir in gewohnter Form die inhomogenen Maxwellgleichungen hinschreiben. In der Lorentzeichung ist $\partial_\mu \partial^\nu A^\mu = \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0$ was uns sofort die Maxwellgleichungen

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu.$$

Die homogenen Maxwellgleichungen ergeben sich schon aus der Potenzialdarstellung der Felder. Eine besonders kompakte Darstellung beruht auf dem dualen Feldstärketensor: Wir benutzen den total antisymmetrischen Tensor vierter Stufe

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \quad \text{zyklisch invariant } e^{0123} = 1.$$

Das heißt also, dass bei zwei gleichen Indizes $\epsilon = 0$ ist und das Vorzeichen die Parität der Zahl der Permutationen der Indizes angibt. Der duale Feldstärketensor ist damit

$$\tilde{F}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit sind die homogenen Maxwellgleichungen, wie man leicht nachrechnet,

$$\partial_\alpha \tilde{F}^{\alpha\beta} = 0.$$

Diese Form der Maxwellgleichungen betont die innere Symmetrie - um von F nach $\tilde{F}$ zu gehen werden $\vec{E}$ und $\vec{B}$ vertauscht (und ein Minuszeichen eingeführt). Ansonsten haben die Maxwellgleichungen auf der linken Seite eine analoge Struktur, was in der kovarianten Darstellung sehr viel deutlicher ist, als in der konventionellen Darstellung.

7.3.9 Lorentzboost für Elektrostatik

Die einfachste Anwendung der Lorentztransformation in der Elektrodynamik ist der Boost eines elektrostatischen Problems in ein magnetostatisches Problem mit geraden Stromfäden (also z.B. keinem magnetischen Dipol). Wir finden die Lösung des elektrostatischen Problems ϕ mit Ladungsverteilung ρ also Viererstrom $j^\mu = \left(c\rho, \vec{j}\right)$ und haben im entsprechenden Bezugssystem $A^\mu = \left(\phi/c, \vec{0}\right)$. Wenn wir jetzt eine Lorentztransformation Λ^ν_μ durchführen erhalten wir die Lösung des magnetostatischen Problems mit $j^{\nu\prime} = \Lambda^\nu_\mu j^\mu$ (was im Allgemeinen ein kombiniertes elektro- und magnetostatisches Problem ist) als $A^{\nu\prime} = \Lambda^\nu_\mu j^\mu$.

Als Beispiel haben wir in der Elektrostatik für den Fall einer Linienladung $\rho(\vec{r}) = \sigma\delta(x)\delta(y)$ betrachtet. Das Potenzial war $\phi(r) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0}\log\frac{r}{r_0}$. Hier ist $r{=}\sqrt{x^2+y^2}$. Wir boosten jetzt entlang der z - Richtung und erhalten $\phi' = \gamma\phi$ und $A_z = -\gamma v\phi/c^2$. Einerseits sehen wir den Längenkontraktions-/Zeitdilatiations-Vorfaktor γ. Andererseits haben wir aus dem skalaren Potenzial ein Vektorpotenzial erzeugt. Ausgeschrieben haben wir $A_z = -\gamma\frac{\mu_0}{2\pi}\log\left(\frac{r}{r_0}\right)$ und damit $\vec{B} = \gamma\frac{\mu_0}{2\pi r}\hat{e}_\phi$ was im nichtrelativistischen Limes unserem Ergebnis aus der Elektrostatik entspricht.