Kapitel 6

Die Erzeugung von elektromagnetischen Wellen

Bislang haben wir die Wellenausbreitung betrachtet und angenommen, dass die Welle bereits existiert, also erzeugt wurde. Dazu haben wir i.A. Ladungen und Ströme vernachlässigt. Dieser wollen wir uns zuwenden. Wir werden u.a. lernen, warum Strahlung sich mit viel größerer Reichweite ausbreitet, als statische Felder, wie Antennen funktionieren, und warum der Himmel blau ist. Unsere Herangehensweise ist wiederum recht mathematisch.

6.1 Die Greensche Funktion der Wellengleichung

Wir arbeiten ab jetzt in der Lorentzgleichung. Wir haben gesehen, dass die Komponenten von Skalar- und Vektorpotenzial dort die inhomogene Wellengleichung

$$\Box\psi\left(\vec{r},t\right) = f(\vec{r},t)$$

erfüllen, wobei ψ stellvertretend für diese Potenzialkomponenten steht und f für die Ladungsdichte und die Komponenten der Stromdichte. Wir wollen diese Aufgabe wiederum sehr allgemein lösen und leiten daher die Greensche Funktion her unter der Annahme her, dass die räumliche Randbedingung wieder das Verschwinden im Unendlichen ist und die zeitliche Randbedingung Kausalität ist, d.h. die Wirkung folgt auf die Ursache. Beide Randbedingungen sind raumzeitlich translationsinvariant und die Gleichung für die Greensfunktion ist

$$\left[\Delta_x - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right]G(\vec{x}.\tau) = \delta^3\left(\vec{x}\right)\delta\left(\tau\right)$$

wobei $\vec{x} = \vec{r} - \vec{r}'$ und $\tau = t - t'$ ist. Kausalität bedeutet hier, dass $G(\vec{x},\tau < 0) = 0$ ist. Wir Fouriertransformieren von $(\vec{x},\tau)$ nach $\left(\vec{k},\omega\right)$ und erhalten sofort als Greensfunktion

$$\tilde{G}\left(\vec{k},\omega\right) = \frac{1}{\omega^2/c^2 - k^2}.$$

Wie schon in der Statik ist der Clou hier die Rücktransformation gemäß

$$G\left(\vec{r},\tau\right)=\int\frac{d^3kd\omega}{(2\pi)^4}\,\frac{c^2}{\omega^2-k^2c^2}e^{i\left(\vec{k}\,\cdot\,\vec{x}-\omega\tau\right)}=\int\frac{dk}{\left(2\pi\right)^3}\int d\omega\,\frac{k^2c^2}{\omega^2-k^2c^2}\int d\cos\theta\;e^{i(kx\cos\theta-\omega\tau)}$$

wobei wir hier Kugelkoordinaten eingeführt und die azimuthale Integration schon ausgeführt haben. Es folgt die polare Integration analog zur Elektrostatik

$$G(\vec{x},\tau)=\frac{2}{(2\pi)^3x}\int dk\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\frac{kc^2}{\omega^2-k^2c^2}\sin(kx)e^{-i\omega\tau}. \tag{6.1}$$

Jetzt müssen wir der Tatsache ins Auge sehen, dass der Nenner zwei Pole hat. Wir könnten meinen, das Ergebnis müsste unter allen Umständen divergieren. Wir wenden jetzt einen Schritt namens Regularisierung an, der zunächst die Randbedingung der Kausalität ins Spiel bringt. Wir wollen ja, dass für $\tau<0$ die Greensche Funktion verschwindet. Wir verschieben jetzt die Pole mit einer positiven infinitesimalen Größe ϵ so, dass der Nenner die Form

$$\omega^2-(kc)^2=(\omega-kc)\left(\omega+kc\right)\rightarrow\left(\omega-(kc-i\epsilon)\right)\left(\omega-(-kc-i\epsilon)\right).$$

Damit befinden sich beide Pole in der unteren Hälfte der komplexen Zahlenebene, $\mathrm{Im}z<0$.

Jetzt benutzen wir den *Residuensatz.* Dieser besagt: Ist $f(z)$ eine Funktion, die im Komplexen analytisch ist bis auf eine diskrete Menge $\{z_j\}$ und C ein geschlossener Weg sowie $n(z_j)$ die Umlaufzahl von C um z_j, dann ist das Integral

$$\oint_C f(z)dz=2\pi i\sum_j n\left(z_j\right)\mathrm{Res}\left(f(z),z_j\right).$$

Den Ausdruck $\mathrm{Res}\left(f(z),z_j\right)$ heißt *Residuum* von f in z_j. Wenn die Nennernullstelle von $f=p/q$, also die Nullstelle von q , einfach ist, dann ist

$$\mathrm{Res}\left(f(z),z_j\right)=\frac{p(z_j)}{q'(z_j)}.$$

Die Kunst der Anwendung des Residuensatzes ist es, einen Integrationsweg der zunächst im Reellen gewählt ist zu einem geschlossenen komplexen Weg zu schließen ohne, dass die zusätzlichen Komponenten einen Beitrag liefern. Wir wenden dies jetzt auf das Integral (6.1) an. Für $\tau<0$ schließen wir den Integrationsweg in der oberen komplexen Halbebene mit einem Halbkreis. Durch die Exponenzialfunktion wird der Beitrag hiervon komplett unterdrückt. Außerdem haben wir durch unsere Regularisierung sichergestellt, dass keine Pole in dieser obenen Halbebene auftreten (also alle Pole gegenüber dieser Integrationskontur die Umlaufzahl null haben). Damist ist in der Tat $G(\vec{x},\tau<0)=0$.

Für $\tau<0$ schließen wir dei Contur in der unteren Halbebene. Hier haben wir zwei Pole bei $\pm kc-i\epsilon$ die im Uhrzeigersinn umlaufen werden, also Umlaufzahl

-1 haben. Das Residuum ist, mit $p(z) = e^{-iz\tau}$ und $q(z) = z^2 - k^2c^2$. Damit haben wir die Residuen

$$\mathrm{Res}\left(\frac{e^{-iz\tau}}{z^2 - k^2c^2}, z = \pm kc - i\epsilon\right) = \pm\frac{e^{\mp ikc\tau}}{2kc}$$

und erhalten

$$G(\vec{x}, \tau) = \frac{c}{2\pi^2 x}\int_0^\infty dk\ \sin(kx)\sin(kc\tau).$$

Das riecht nach Dirac-Delta! Wir zerlegen

$$G(\vec{x}, \tau) = -\frac{c}{16\pi^2 x}\int_{-\infty}^{\infty} dk\ \left(e^{ikx} - e^{-ikx}\right)\left(e^{ikc\tau} - e^{-ikc\tau}\right)$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass der Integrand gerade ist, um das Integrationsintervall zu verdoppeln. Wir bekommen eine Kombination aus vier Dirac-Deltas in der Form

$$G(\vec{x}, \tau) = -\frac{c}{8\pi x}\left[\delta(x + c\tau) - \delta(x - c\tau) - \delta(x - c\tau) + \delta(-x + c\tau)\right]$$

Wir können diese Terme paarweise zusammenfassen und feststellen dass, da $x, \tau > 0$ sind und zwei der Diracdeltas niemals von null verschieden sein werden. Wir haben am Ende

$$G(\vec{r} - \vec{r}', t - t') = -\frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|}\delta\left(t - t' - \frac{1}{c}|\vec{r} - \vec{r}'|\right).$$

Diese Greensche Funktion sieht aus wie die der Elektrostatik, hat aber einen zusätzlichen Retardierungsfaktor - er gibt der Ursache des Feldes Zeit, vom Ort der Erzeugung zum Beobachter zu fließen. Dies wird klar im Ausdruck für die Lösung der Wellengleichung. Wir wählen stellvertretend das Skalarpotenzial

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r'dt'\ \frac{\rho(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\delta\left(t - t' - \frac{1}{c}|\vec{r} - \vec{r}'|\right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r'\frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{1}{c}|\vec{r} - \vec{r}'|\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \qquad (6.2)\end{aligned}$$

Wir sehen, dass in der Tat das Potenzial gegeben ist durch die Ladungsverteilung in der Vergangenheit. Anders gesagt ist die Interpretation dieser Greensfunktion die, dass wir zu einer früheren Zeit einen undendlich kurzen Punktblitz an Ladung gehabt haben, von dem sich dann mit Lichtgeschwindigkeit eine Kugelwellenfront ausbreitet.

Der Schritt der Regularisierung wirkt beim Erstkontakt oft etwas mathematisch gewagt. Bedenken Sie aber: Die Fouriertransformation liefert immer eine spezielle Lösung der Differenzialgleichung, Anfangsbedingungen haben in ihr keinen Platz. Insofern addieren wir beim Regularisieren eine geeignete spezielle Lösung, mit der wird die Anfangsbedingung einhalten können. Auch haben wir ja durchaus die zunächst erwartende Unendlichkeit auf dem Lichtkegel erhalten dergestalt, dass unsere Lösung ein Diracdelta enthält.

Dieses Integral, das auch wieder einige Kunst bei der Berechnung erfordert, enthält die gesamte Physik der Wellenausbreitung. Bevor wir dies diskutieren, wollen wir uns mit den Eigenschaften von Kugelwellen beschäftigen.

6.2 Retardierte Kugelwellen

Wir betrachten jetzt Kugelwellen (wie sie später als Lösung des Greensfunktionsintegral auftauchen werden) und diskutieren ihre Eigenschaften. Wir setzen die Form

$$\vec{A}\left(\vec{r},t\right) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{w}\left(u\right)}{r} \quad u = t - r/c$$

an. Wir sehen, dieses Integral hängt nur durch den Betrag r von den Koordinaten ab. Es ist insbesondere

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial r} = \frac{\mu}{4\pi}\left[-\frac{\vec{w}(u)}{r^2} - \frac{1}{c}\frac{\dot{\vec{w}}(u)}{r}\right].$$

Wir sehen also einen Term, der wie $1/r^2$ abfällt, vergleichbar mit ähnlichen Ausdrücken in der Statik, und einen inhärent dynamischen, der nur wie $1/r$ fällt. Wenn wir der Zeitabhängigkeit von $\vec{w}$ eine Frequenz ν zuordnen, dann entspricht das Verhältnis des zweiten zum ersten Terms etwa $\nu r/c = r/\lambda$. Sobald der Abstand vom Ursprung größer ist als eine Wellenlänge dominiert also der zweite Term. Wir erhalten damit als Magnetfeld für diese rein radiale Abhängigkeit mit einer analogen Aufteilung

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\hat{e}_r\times\frac{\partial}{\partial r}\frac{\vec{w}\left(u\right)}{r}\\ &= \vec{B}_{\text{nah}} + \vec{B}_{\text{fern}}.\end{aligned}$$

Das dazugehörige elektrische Feld ist gegeben durch

$$\dot{\vec{E}} = c^2\vec{\nabla}\times\vec{B}.$$

Das Nahfeld $\vec{B}_{\text{nah}} = -\frac{\mu_0}{4\pi r^2}\hat{e}_r\times\vec{w}\left(u\right)$ dominiert bei einem Abstand kleiner als die Wellenlänge wie schon oben gesagt und folgt damit adiabatisch dem Vektor $\vec{w}$ der. wie wir später sehen werden, die Strahlungsquelle charakterisiert. Das entsprechende elektrische Feld lässt sich konstruieren zu

$$\dot{\vec{E}}_{\text{nah}} = \frac{2\mu_0}{4\pi r^3}\hat{e}_r\times\left(\hat{e}_r\times\vec{w}\right)$$

Der zum nahfeld gehörende Poynting-Vektor fällt also mindestens wie r^{-5} ab.

Im Fernfeld $\vec{B}_{\text{fern}} = -\frac{\mu_0}{4\pi c}\hat{e}_r \times \frac{\dot{\vec{w}}(u)}{r}$ ist andererseits

$$\vec{E}_{\text{fern}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\hat{e}_r \times \left(\hat{e}_r \times \dot{\vec{w}}\right),$$

und damit, unter Anwendung der Doppel-Vektorprodukt-Identität

$$\vec{S}_{\text{fern}} = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c r^2}\hat{e}_r \left(\hat{e}_r \times \dot{\vec{w}}\right)^2.$$

Der Energietransport zeigt also radial vom Ursprung weg und fällt nur mit r^{-2} ab. Den Energiefluss (die Leistung) durch ein Raumwinkelelement $d\Omega = d\phi d\cos\theta$ ist dann

$$\frac{dP}{d\Omega} \equiv r^2 \hat{n} \cdot \vec{S} = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c}\left(\hat{e}_r \times \dot{\vec{w}}\,(u)\right)^2 = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c}\left|\dot{\vec{w}}(u)\right|^2 \sin^2\alpha(u)$$

Da es hier um die Länge des Vektorprodukts geht, können wir dies alternativ über den Winkel α zwischen $\hat{e}_r$ und $\dot{\vec{w}}$ ausdrücken. Die größte Leistung ist also senkrecht zu $\dot{\vec{w}}$. Dies erlaubt auch die Berechnung der totalen abgestrahlten Leistung

$$\begin{aligned} P &= \int d\Omega\,\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c}\left|\dot{\vec{w}}(u)\right|^2 \int_{-1}^{1} d\cos\alpha\ \left(1-\cos^2\alpha\right)\int_0^{2\pi} d\pi \\ &= \frac{\mu_0}{8\pi c}\left|\dot{\vec{w}}(u)\right|^2\left(2-\frac{2}{3}\right) = \frac{\mu_0}{6\pi c}\left|\dot{\vec{w}}(u)\right|^2. \end{aligned}$$

Hier haben wir die Symmetrieachse der Kugelkoordinaten für den Zweck den Integration entland $\dot{\vec{w}}$ gelegt.

6.3 Dipolstrahlung

Wie auch schon im Fall der Statik brauchen wir im Allgemeinen eine Entwicklung nach Momenten der Ladungs- bzw. Stromverteilung, wobei wir uns auf das Fernfeld konzentrieren. Hier ist der kleine Parameter die Größe der Quelle verglichen mit der Wellenlänge des Lichtes, $r_c/\lambda = r_c\nu/c$. Wir sehen also, dass dies eine Entwicklung in der Frequenz mal der Zeit ist, die Strahlung braucht, um die Quelle zu durchlaufen - wir sind im Limes langsamer, nichtrelativistischer Ladungen. Wir berechnen die Potenziale anhand von Gl. (6.2), die auch gilt, wenn links die Komponenten des Vektorpotenzials und im Integranden die entsprechenden Kompenenten der Stromdichte stehen. Im Argument nähern wir indem wir die Verspätung über die Probe entwickeln

$$\vec{j}\left(t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right) \simeq \vec{j}\,(u) + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{j}\,(u)}{\partial u}\hat{e}_r \cdot \vec{r}'.$$

Da wir auch im Fernfeld sind, also einen Abstand $r > \lambda \gg r_c$ von der Probe haben, können wir im Nenner von Gl. (6.2) nähern $|\vec{r}-\vec{r}'|^{-1} \simeq r^{-1}$ nähern. In der niedrigsten Ordnung haben wir also

$$\vec{A}^{(0)} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int d^3r' \vec{j}\,(u)\,.$$

So ein ähnliches Integral hatten wir schon einmal in der Magnetostatik und wir haben gezeigt, dass es verschwindet und darum keine magnetischen Monopole existieren. Hier ist das anders! Wir vergegenwärtigen uns, dass z.B.

$$\vec{\nabla} \cdot \left(z\vec{j} \right) = z \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{j} \right) + \vec{j} \cdot \left(\vec{\nabla} z \right) = -z\dot{\rho} + j_z$$

wobei wir im letzten Schritt die Kontinuitätsrelation benutzt haben. Damit können wir ingegrieren über ein Volumen V das größer ist, als die Ladungs-/Stromverteilung

$$\int_V d^3r\ j_z = \int_V d^3r\ z\dot{\rho} + \int_V d^3r\ \vec{\nabla} \cdot \left(z\vec{j} \right).$$

Der letzte Term kann mit dem Gaußschen Satz in ein Oberflächenintegral über ∂V umgeformt werden - und das verschwindet, weil durch die Oberfläche keine Ströme fließen. Damit finden wir die Ableitung des elektrischen Dipolmoments. Die anderen Komponenten gehen analog und wir haben

$$\int_V d^3r\ \vec{j} = \dot{\vec{p}}(u). \tag{6.3}$$

Damit haben wir die niedrigste Ordnung der Strahlung von langsamen Ladungen, Dipolstrahlung berechnet. Es ist

$$\vec{A}^{(0)} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\vec{p}}(u).$$

Wir haben also eine Kugelwelle wie im vorangegangenen Abschnitt diskutiert, mit $\vec{w} = \dot{\vec{p}}$. Aus den dort hergeleiteten Formeln können wir sofort ablesen, dass die Strahlungsleistung durch $\ddot{\vec{p}}(u)$ gegeben ist, der Dipolbeschleunigung. Als Merkregel (die wir später noch genauer untersuchen wollen) halten wir fest, dass *beschleunigte Ladungen strahlen.* Für die Geometrie der Abstrahlung ist die Richtung der Dipolbeschleunigung zum Zeitpunkt der Abstrahlung verantwortlich. Das Magnetfeld der Strahlung ist senkrecht zu dieser und zu $\hat{e}_r$ polarisiert, der stärkste Energiefluss ist senkrecht zu dieser Beschleunigung.

Dipolstrahlung hat eine große Bedeutung in Wissenschaft und Technik. Die Wechselwirkung von Atomen und Molekülen mit Licht, dessen Wellenlänge drei Größenordnungen größer ist als die Quelle ist ein Fall für diese Dipolnäherung. Kurzwellen haben eine Wellenlänge von 10-100 m - klarerweise sind die Antennen, die Sie in Radios mit herumtragen kleiner, sogenannte Dipolantennen. Eine typische Aufgabenstellung im Zusammenhang mit Dipolstrahlung ist es, in einer gegebenen Ladungsanordnung $\ddot{\vec{p}}$ zu berechnen und dann in die Formeln für Dipolstrahlung einzusetzen.

6.4 Beispiele für Dipolstrahlung

6.4.1 Hertzscher Dipol

Die Entdeckung der Dipolstrahlung durch Heinrich Hertz war die endgültige Bestätigung der Maxwell-Theorie. Angelehnt an Hertz' historisches Experiment bezeichnen wir ein Dipolmoment der Form $\vec{p}(t) = \vec{p}_0 \cos\omega t$ als Hertz-Dipol - es hat also eine feste Richtung im Raum und eine harmonische Zeitabhängigkeit. Wir legen die z-Achse entlang $\vec{p}_0$ und erhalten

$$\begin{aligned}\vec{B}_{\text{fern}} &= \frac{\mu_0 p_0}{4\pi r}\omega^2 \sin\theta\cos(\omega u)\hat{e}_\phi \\ \vec{E}_{\text{fern}} &= \frac{\mu_0 p_0}{4\pi r}\omega^2 \sin\theta\cos(\omega u)\,\hat{e}_\theta\end{aligned}$$

Es handelt sich also um eine transversal und linear polarisierte Kugelwelle die vor allen Dingen senkrecht zum Dipol (aufgrund des Faktors $\sin\theta$ abgestrahlt wird. Entsprechend ist die Richtungsabhängigkeit der abgestrahlten Leistung

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0\omega^4 p_0^2}{(4\pi)^2 c}\cos^2\omega u \sin^2\theta$$

Diese Leistung oszilliert zeitlich. Ihren Mittelwert erhält man mittels $\left\langle\cos^2\omega u\right\rangle = \left\langle\sin^2\omega u\right\rangle = 1/2$. Die gesamte Leistung skaliert wie ω^4

$$P=\frac{\mu_0\omega^4 p_0^2}{6\pi c}\cos^2\omega u.$$

6.4.2 Kurze Antenne

Wir betrachten eine Sendeantenne, die viel kürzer ist, als die von ihr emittierte Strahlung und die aus der Mitte gespeist wird. Die Stromverteilung auf der Antenne, die wir als verlustbehafteten Wellenleiter ansehen können, ist

$$\vec{j} = I\sin\left[k\left(l-|z|\right)\right]\delta(x)\delta(y)\Theta\left(l-|z|\right)\cos\omega t\hat{e}_z$$

Wir berechnen hier das Dipolmoment direkt über die Stromverteilung, Gl. (6.3)

$$\dot{\vec{p}} = \int d^3r\,\vec{j} = 2I\hat{e}_z\cos\omega t\int_0^l dz\ \sin k(l-z) = \frac{2I}{k}\hat{e}_z\cos\omega t\left(1-\cos kl\right)\simeq Ikl^2\cos\omega t$$

Damit haben wir dieses Aufgabe auf einen Hertzschen Dipol zurückgeführt.

6.4.3 Streuung von freien Ladungen

Streuung ist die Anordnung, bei dem einfallende Objekte (Teilchen, Wellen) mit einem zentralen Target wechselwirken, und dann wieder auslaufen mit veränderten Eigenschaften, die aus dem Wechselwirkungsprozess herrühren und damit erlauben, Details dieser Wechselwirkung und des Targets selbst zu messen. Wir betrachten hier insbesondere die Streuung von ebenen elektromagnetischen Wellen an freien Ladungen am Ursprung im Dipollimit. Die einfallende Welle sei linear polarisiert

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos\left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t\right).$$

Das Feld sei schwach und niederfrequent genug, dass sie die Ladung nicht zu relativistischen Geschwindigkeiten beschleunigt und damit die Multipolentwicklung der Strahlung möglich ist. Die nichtrelativistische Bewegungsgleichung ist

$$m\ddot{\vec{r}} = q\vec{E} \;\Rightarrow\; \ddot{\vec{d}} = \frac{q^2}{m}\vec{E}. \tag{6.4}$$

Damit erhalten wir direkt die Dipolbeschleunigung, die ja die zentrale Größe zur Charakterisierung von Diplostrahlung ist. Wir sehen, dass Anfangsbedingungen irrelevant sind. Wir bezeichnen θ als den Winkel zwischen Beobachtungsrichtung und Polarisation und haben

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 q^4 E^2}{16\pi^2 cm^2} \sin^2\theta \quad P = \frac{\mu_0 q^4 E^2}{6\pi cm^2}.$$

Wir sehen die sehr starke Abhängigkeit von der Ladung in der vierten Potenz. Dies entsteht dadurch, dass die Ladung die Kopplungskonstante sowohl für das einfallende, als auch für das auslaufende Feld.

Diese Größen hängen (wenn auch hier trivial - das ist nicht immer so) von der eingestrahlten Strahlung ab. Stattdessen stellen wir fest, dass die Größe des Poynting Vektors, also der Energiestromdichte $S = \epsilon_0 c E^2$ ist - also die zeitliche Änderung der Energie pro Querschnittsfläche. Damit können wir uns fragen, wieviel Strahlfläche der Leistung entspricht, die herausgestreut wird. Die Größe

$$d\sigma = dP/S = \frac{q^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 \left(mc^2\right)^2} \sin^2\theta d\Omega$$

hat darum die Dimension Fläche und heißt differenzieller Wirkungsquerschnitt. Der totale Wirkungsquerschnitt ist damit

$$\sigma = \frac{P}{S} = \frac{q^4}{6\pi\epsilon_0^2 \left(mc^2\right)^2}$$

und hat die Bedeutung der effektiven Größe des "Schattens" des Elektrons. Dieser Ausdruck heißt *Thompson-Streuformel.*

Hier haben wir linear polarisiertes Licht angenommen. Wir haben die genaue Theorie von Polarisation nicht besprochen, können aber hier zumindest den Fall natürlichen unpolarisierten Lichts behandeln. Seien $\hat{e}$ und $\hat{n}$ Einheitsvektoren entlang des elektrischen Feldes bzw. der gestreuten Welle. Dann ist

$$\left\langle \sin^2\theta \right\rangle = 1 - \left\langle (\hat{e} \cdot \hat{n})^2 \right\rangle = 1 - \sum_{a,b} n_a n_b \left\langle e_a e_b \right\rangle.$$

Der Mittelwert $\langle e_a e_b \rangle$ ist eine symmetrische Matrix mit Spur $\left\langle \sum_a e_a^2 \right\rangle = 1$ deren Skalarprodukt mit dem Wellenvektor verschwindet, weil ja die einfallende Welle transversal sein muss. Das legt die Matrix bereits eindeutig fest zu

$$\langle e_a e_b \rangle = \frac{1}{2} \left(\delta_{ab} - \frac{k_a k_b}{k^2} \right).$$

Führen wir jetzt den Winkel α zwischen $\vec{k}$ und dem Beobachter ein, so haben wir

$$\langle e_a e_b \rangle = \frac{1}{2} \left(1 + \cos^2 \alpha \right).$$

Dies liefert uns für den differenziellen Wirkungsquerschnitt für unpolarisiertes Licht

$$d\sigma = \frac{q^4}{\left(8\pi\epsilon_0\right)^2 \left(mc^2\right)^2} \left(1 + \cos^2 \alpha\right) d\Omega.$$

Wir sehen also, dass durchaus ein Teil des Lichts vorwärts gestreut wird, die Streuung senkrecht zur Einfallsrichtung aber doppelt so stark ist.

6.4.4 Streuung an gebundenen Ladungen - warum der Himmel blau ist

Jetzt nehmen wir an, dass die Ladungen nicht frei, sondern gebunden sind, z.B. in einem Molekül oder kondensiertem Medium. Die mikroskopischen elektrischen Felder sind i.A. sehr stark, viel stärker, als das enfallende Licht, darum können wir die Dynamik der gebundenen Ladungen durch einen gedämpften harmonischen Oszillator genähert werden. Die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\vec{r}} + m\gamma\dot{\vec{r}} + m\omega_0^2 \vec{r} = q\vec{E}(t).$$

Mittels des üblichen komplexen Ansatz ist $\vec{E} = \mathrm{Re}\left[\vec{E}_0 e^{-i\omega t}\right]$. Damit haben wir die komplexe Resonanzkurve

$$\vec{r} = \frac{q}{m} \mathrm{Re} \frac{\vec{E} e^{-i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}.$$

Die bereits erwähnte Dipolbeschleunigung ist dann $\ddot{\vec{p}} = -q\omega^2 \vec{r}$. Wenn wir die gleichen Schritte wie bei der Thompsonstreuung durchführen (Realteil nehmen nicht vergessen!) und finden

$$\sigma = \frac{q^4}{6\pi \left(mc^2\right)^2 \epsilon_0^2} \frac{\omega^4}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2 \omega^2}.$$

Dies ist die *Rayleigh-Streuformel.* Messung des Wirkungsquerschnitts und Finden des Maximums sowie der Breite der Lorentzkurve liefern also die Resonanzfrequenz ω_0 und die Dämpfung γ der gebundenen Elektronen. Bei niedrigen Frequenzen wächst der Wirkungsquerschnitt wie ω^4.

Die Resonanzfrequenzen von Molekülen in der Luft sind typischerweise im Ultravioletten, d.h. für optisches Licht gilt die ω^4- Abhängigkeit. Rotes Licht läuft also kaum gestreut durch die Atmosphäre. Wenn die Sonne hoch am Himmel steht schafft das auch gelbes Licht - darum ist die Sonne tagsüber gelb und morgens und abends rot. Blaues licht wird sehr stark gestreut - und zwar mehrfach. Durch diese Mehrfachstreuung bewegt sich das Licht diffus fort und der ganze Himmel scheint blau zu leuchten.

6.5 Grenzen der Dipolstrahlung

Auch die Entwicklung in langsamer Bewegung hat höhere Ordnungen. Die nächste Ordnung in der Entwicklung langsamer Ladungen sind die magnetische Dipolstrahlung gegeben durch $\ddot{\vec{m}}$ und elektrische Quadrupolstrahlung gegeben durch die dritte Zeitableitung des Quadrupolmoments. Ach diese Ordnung (wie alle höheren Ordnungen der Entwicklung im Fernfeld) erzeugen Kugelwellen mit einem $1/r$- Abfall der Felder und abstandsunabhängigem P . Die höhere Ordnung manifestiert sich in immer stärkeren Frequenzabhängigkeiten von $P \simeq \omega^6$ in den genannten Fällen.

Andere Arten von Strahlung, bei denen die Entwicklung in langsamen Ladugen zusammenbricht, erhält man mit anderen Methoden. Der Unterschied macht sich bemerkbar, wenn die Geschwindigkeit der Ladungsträger vergleichbar mit der Lichtgeschwindigkeit ist - dazu müssen wir aber erst einmal die spezielle Relativitätstheorie lernen.

Auch das Nahfeld - das der Quelle adiabatisch folgt und damit keine Strahlung im herkömmlichen Sinn darstellt - hat inzwischen Anwendungen. Während Mikroskopie mit Strahlung durch die Wellenlänge auflösungsbegrenzt wird ist die Auflösung bei Abbildung mit dem Nahfeld nur durch die Quellengröße beschränkt. Dies führt zur Nahfeldmikroskopie, einer hochauflösenden mikroskopischen Technik, die mittels elektromagnetischen Wellen abbildet.