Kapitel 4

Wellenausbreitung

Nachdem wir uns bisher mit statischen Lösungen der Maxwellgleichungen beschäftigt haben, wollen wir jetzt zeitabhängige Lösungen - elektromagnetische Wellen - anschauen. Wir betrachten zunächst nur die Ausbreitung von Wellen im Vakuum, setzen also $\rho = 0, \vec{j} = 0$. Im nächsten Kapitel schauen wir dann die Wellenausbreitung in Medien sowie an Grenzflächen zwischen Medien und Vakuum an. Erst dann diskutieren wir die Erzeugung von Elektromagnetischen Wellen.

4.1 Die Wellengleichung

Wir haben im ersten Kapitel bereits Wellengleichungen für die Potenziale hergeleitet. Daraus folgt die Gültigkeit der Wellengleichung auch für ihre Ableitungen, das elektromagnetische Feld. Um die Physik hinter der Wellengleichung besser zu verstehen, möchten wir sie dennoch noch einmal herleiten.

Wir nehmen die Zeitableitung des Ampere-Gesetzes für $\vec{j} = 0$

$$\frac{1}{c^2}\ddot{\vec{E}} = \vec{\nabla} \times \dot{\vec{B}}$$

sehen also, dass ein beschleunigtes $\vec{E}$-Feld die Wirbeldichte des Magnetfelds verändert. Diese veränderlichen Wirbel induzieren ein elektrisches Feld

$$\frac{1}{c^2}\ddot{\vec{E}} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \Delta\vec{E} \ \Leftrightarrow\ \Box\vec{E} = 0.$$

Die Wellengleichung ersteht also aus dem Wechselspiel der Erzeugung des magnetischen Felds aus dem Maxwellschen Verschiebungsstrom und der Induktion eines elektrischen Wirbelfelds durch Induktion. Darum war die Einführung des Verschiebungsstroms Maxwells entscheidender Schritt zur Identifikation elektromagnetischen Wellen wie z.B. Licht.

4.2 Ebene Wellen im Vakuum

Wir betrachten jetzt die Struktur von Lösungen der Wellengleichung. Eine wichtige Klasse sind die monochromatischen ebenen Wellen

$$\vec{E} = \mathrm{Re}\left(\vec{E}_0 e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}\right) \quad \vec{B} = \mathrm{Re}\left(\vec{B}_0 e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}\right).$$

Hier benutzen wir einen komplexen Ansatz. Im Folgenden werden wir oft nicht dazuschreiben, dass das physikalische Feld der Realteil ist. Tatsächlich kann man bei allen linearen Operationen (einschließlich Differenziation) einfach mit dem komplexen Feld rechnen und dann am Ende den Realteil bilden um das physikalische Feld zu erhalten. Bei nichtlinearen Operationen, z.B. dem Multiplizieren zweier Felder bei der Berechnung von Energiedichte und Poynting-Vektor, gilt das aber nicht, da muss zuerst der Realteil gebildet werden. Die Vorfaktoren $\vec{E}_0$, $\vec{B}_0$ heißen *Amplituden* der Wellen und die Exponenten $\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t$ die Phase der Welle. Man spricht von einer ebenen Welle da die Fläche konstanter Phase eine Ebene ist, die senkrecht auf den Wellenvektor $\vec{k}$ steht.

Unter welchen Voraussetzungen sind ebene Wellen Lösungen der Maxwellgleichungen? Nun, zunächst mal müssen sie eine Lösung der Wellengleichungen sein. Einsetzen liefert

$$\Box\vec{E} = \vec{E}_0\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) = 0$$

damit gilt also die *Dispersionsrelation* $\omega = \pm ck$. Hier ist ω die Frequenz und k die Wellenzahl. Das Erfüllen der Wellengleichung, die ja durch weitere Differenziation aus den Maxwellgleichungen gewonnen wurde, ist aber nur notwendig und nicht hinreichend für die Gültigkeit dieses Ansatzes. Wir überprüfen das Coulombgesetz im Ladungsfreien Raum zu $0 = \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = i\vec{k}\cdot\vec{E}$. Analog gilt $i\vec{k}\cdot\vec{B} = 0$. Die Felder müssen also immer senkrecht auf den Wellenvektor stehen - ebene Wellen im Vakuum heißen deshalb auch *transversal.* Ferner gilt das Induktionsgesetz hier in der Form

$$i\vec{k}\times\vec{E} = i\omega\vec{B} \tag{4.1}$$

und die vierte Maxwellgleichung in der Form $i\vec{k}\times\vec{B} = -i\omega\vec{E}/c^2$. Diese beiden Gleichungen sind redundante Gleichungen, sie sagen beide, dass auch $\vec{B}$ und $\vec{E}$ aufeinander senkrecht stehen und ansonsten in Phase schwingen. Genauer gesagt bilden die Vektoren $\vec{k}$, $\vec{E}$ und $\vec{B}$ ein rechtshändiges Dreibein, sie erfüllen also eine rechte-Hand-Regel.

Die verbleibende Freiheit charakterisiert die Polarisation der ebenen Welle. Dies verdeutlichen wir oBdA an einer ebenen Welle in z Richtung. Schwingen die verbleibenden x und y-Komponenten der Welle in Phase, exisitiert also ein α so, dass $E_{x/y} = \left|E_{x/y}\right| e^{i\alpha}$, dann können wir schreiben

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} |E_x| \\ |E_y| \\ 0 \end{pmatrix} \cos\left(kz - \omega t + \alpha\right) = |E| \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} \cos\left(kz - \omega t + \alpha\right)$$

wobei $|E| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$ die Stärke der Welle beschreibt und $\tan\phi = \frac{E_y}{E_x}$ ist. Das elektrische Feld ändert also seine Richtung nicht und wir sprechen von linearer Polarisation. Der andere Extremfall ist, dass die Komponenten um $\pi/2$ phasenverschoben aber vom Betrag her gleich sind, also

$$\vec{E} = \left|\vec{E}\right| \begin{pmatrix} \cos(kz - \omega t + \alpha) \\ \pm\sin(kz - \omega t + \alpha) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dieser Fall heißt rechts/linkszirkulare Polarisation. Hier kreist das elektrische Feld in Raum und Zeit - das heißt es bildet eine Schraubenlinie - um die Ausbreitungsrichtung. Im Allgemeinen ist Licht elliptisch polarisiert.

Die Energiedichte der ebenen Welle beruht auf dem Quadrat des elektrischen Feldes - hier ist also nach obigem Rezept zuerst der Realteil zu nehmen. Wir schreiben $\mathrm{Re}\vec{E}(t) = \mathrm{Re}\vec{E}_0 \cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right) - \mathrm{Im}\vec{E}_0 \sin\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right)$ und erhalten

$$\vec{E}^2 = \left(\mathrm{Re}\vec{E}_0\right)^2 \cos^2(kz - \omega t) + \left(\mathrm{Im}\vec{E}_0\right)^2 \sin^2(kz - \omega t) - 2\mathrm{Re}\vec{E}_0\mathrm{Im}\vec{E}_0 \sin(kz - \omega t)\cos(kz - \omega t).$$

Dies ist im Allgemeinen eine stark oszillierende Funktion. Oft interessiert und mehr das Zeitmittel. Das verschwindet für den letzten Term, für die ersten beiden mitteln wir die Quadrate von Sinuns und Kosinus zu 1/2 und finden $\left\langle\vec{E}^2\right\rangle = \vec{E}_0^2/2$. Analog ist $\left\langle\vec{B}^2\right\rangle = \vec{B}_0^2/2$. Außerdem haben wir oben anhand des Induktionsgesetzes gezeigt (4.1) dass $\vec{B}_0 = \left(\vec{k}\times\vec{E}_0\right)/\omega$. Damit ist $\vec{B}_0^2 = \vec{E}_0^2/c^2$. Also sind die elektrischen und magnetischen Beiträge zur Energiedichte im Mittel gleich und es ist

$$\langle\rho_E\rangle = \frac{\epsilon_0}{2}\vec{E}_0^2.$$

Energiestrom und Impulsdichte werden durch den Poynting-Vektor beschrieben. Wir nutzen wiederum das Induktionsgesetz(4.1)

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} = \frac{1}{\mu_0\omega}\vec{E}\times\left(\vec{k}\times\vec{E}\right) = \frac{\vec{k}}{\mu_0\omega}\vec{E}^2.$$

Im letzten Schritt haben wir genutzt, dass die Welle transversal ist. Wir können jetzt wieder das Zeitmittel bilden und haben $\left\langle\vec{S}\right\rangle = \frac{\vec{k}}{2\mu_0\omega}\vec{E}_0^2$. Interessanterweise ist

$$\frac{\left|\left\langle\vec{S}\right\rangle\right|}{\rho_E} = \frac{k}{\mu_0\epsilon_0\omega} = c.$$

Damit können wir sehen, dass die Welle Energie mit Lichtgeschwindigkeit transportiert. Außerdem erinnern wir uns, dass die der Poynting-Vektor auch die Impulsdichte der Welle beschrieben wird und lernen daraus, dass für die Welle $E = pc$ gilt. In der Quantenmechanik führt man Lichtteilchen ein, die Masselos sind. Sie sehen an dieser Beziehung, dass die Masselosigkeit allein klassischen Argumenten geschuldet ist.

4.3 Andere Wellentypen

Monochromatische ebene Wellen sind ein wichtiger, aber beileibe nicht der einzige Fall von elektromagnetischen Wellen. Wir sprechen von monochromatischen Wellen, wenn die Zeitabhängigkeit die Form $e^{i\omega t}$ hat. Wenn wir die kombinierte Raum-Zeitliche Abhängigkeit als eine einzige Funktion $f(\vec{r},t)$ schreiben können, also $\vec{E}(f(\vec{r},t))$ ausgedrückt werden kann, dann charakterisieren Flächen konstanten fs die Geometrie der Welle.

Als Beispiel betrachten wir die Kugelwelle, die später in der Multipolstrahlung noch eine Schlüsselrolle spielen wird. Eine monochromatische Kugelwelle kann in Coulombeichung durch das Vektorpotenzial

$$\vec{A} = \frac{\vec{A}_0}{r} e^{i(kr-\omega t)}.$$

Hier ist die Phase $f(\vec{r},t) = kr - \omega t$ konstant für $r =$ const. d.h. die Phasenflächen sind tatsächlich Kugeln. Coulombeichung impliziert, dass $\vec{A}$ keine radiale Komponente hat. Demzufolge ist auch das elektrische Feld $\vec{E} = i\vec{A}_0 \frac{\omega}{r} e^{i(kr-\omega t)}$ transversal, und auch das magnetische Feld. Wir kommen später noch auf den Energiefluss in solchen Wellen zurück.

4.4 Geführte Wellen

Oftmals möchte man Wellen nicht im gesamten Raum laufen lassen, sondern sie gezielt leiten, z.B. zu Zwecken der schnellen und platzsparenden Datenübertragung. Dies ist komplementär zum Fall von niederfrequentem Wechselstrom, den man typischweise mit der Theorie elektrischer Netzwerke behandelt: Diese Methode setzt implizit voraus, dass die verwendete Struktur kleiner ist als die Wellenlänge der verwendeten Strahlung. Dies wird später noch erläutert.

4.4.1 Rechteckiger Wellenleiter

Wir betrachten einen Wellenleiter mit rechteckigem Querschnitt, der in z Richtung unbegrenzt ist, in den transversalen Richtungen aber mit metallischen Wänden eingeschränkt ist auf $0 \leq x \leq L_1$ bzw. $0 \leq y \leq L_2$. Wir suchen also Wellen, die einmal die freie Wellengleichung sowie die Maxwellgelichung lösen, zum Anderen aber auch die Randbedingungen erfüllen. Wie schon in der Elektrostatik gezeigt, muss das tangenziale elektrische Feld auf einer metallischen Fläche verschiwnden. Da diese Felder auch durch Induktion von zeitveränderlichen Magnetfeldern induziert werden können, müssen auch die Normalkomponenten des Magnetfelds verschwinden (wir interessieren uns hier ja nur für die zeitlich verändliche Komponente von Feldern - ein statisches Magnetfeld wäre grundsätzlich nicht ausgeschlossen). Da sowohl die DIfferenzialgleichungen als auch die Randbedingungen die Koordinaten getrennt behandeln, machen wir für jede Feldkomponente einen *Separationsansatz* , hier exemplarisch für E_x

$$E_x(x,y,z,t) = X(x)Y(y)Z(z)T(t).$$

Wenn wir diesen Ansatz in die Wellengleichung einsetzen und dann durch E_x dividieren, erhalten wir

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} - \frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = 0.$$

Der Strich bedeutet Differenziation nach dem Argument, wird also nur bei ein-Argument Funktionen angewandt. Wir sehen jetzt, dass jeder Summand von einem anderen, seinem natürlichen, Argument abhängt. Dies kann nur funktionieren, wenn alle vier Terme Konstanten sind. Wir schreiben $X''/X = -k_x^2$ etc. sowie $T''/T = -\omega^2$. Damit gilt die übliche Dispersionsrelation $\omega^2 = c^2k^2$ und für die verschiedenen Formen haben wir den Ansatz

$$X = \mathrm{Re} X_0 e^{ik_x t} \quad x \leftrightarrow y, z \quad T = Re T_0 e^{-i\omega t}.$$

Für den Fall des rechteckigen Wellenleiters können wir einen Ansatz machen, der uns die Knoten der Tangentialkomponenten garantiert

$$\begin{aligned} zE_x &= \mathrm{Re}\left(C_x e^{i(k_{xx}x-\omega t)}\right)\sin\left(\frac{m_x\pi y}{L_2}\right)e^{i(k_{zx}z-\omega t)} \\ E_y &= \sin\left(\frac{l_y\pi x}{L_1}\right)\mathrm{Re}\left(C_y e^{i(k_{yy}y-\omega t)}\right)e^{i(k_{zy}z-\omega t)} \\ E_z &= C_z\sin\left(\frac{l_z\pi x}{L_1}\right)\sin\left(\frac{m_y\pi y}{L_2}\right)e^{i(k_{zz}z-\omega t)}. \end{aligned}$$

Hier sind die l_i und m_i ganze Zahlen und die anderen Koeffizienten sind reell. Um den Parameterwald zu lichten fordern wir zunächst das Verschwinden der Divergenz des Feldes im ladungsfreien Inneren des Wellenleiters$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$. Da dies überall im Wellenleiter gelten muss, müssen die verschiedenen Wellenzahlen gleich sein, also

$$k_{zx} = k_{zy} = k_{zz} \equiv k \quad m_x = m_y \equiv m \quad l_y = l_z \equiv l \quad k_{xx} = l\pi/L_1 \quad k_{xy} = m\pi/L_2.$$

Außerdem müssen die Winkelfunktionen zueinander passen, insbesondere müssen C_x und C_y reell sein. Ferner gilt

$$C_x\frac{l\pi}{L_1} + C_y\frac{m\pi}{L_2} - iC_z k = 0. \tag{4.2}$$

Um die Wellengleichung zu erfüllen muss dann gelten $\omega^2 = c^2\left[\left(\frac{\pi l}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{L_2}\right)^2 + k^2\right]$. Bevor wir die Divergenzbedingung weiter strapazieren, bestimmen wir das Magnetfeld mittels $i\omega\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{E}$. Man kann leicht explizit zeigen, dass die Randbedingungen für das Magnetfeld schon automatisch erfüllt sind.

Interessant ist die Betrachtung der z- Komponente

$$B_z = \frac{1}{i\omega}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) = \frac{1}{i\omega}\left(\frac{C_y l\pi}{L_1} - \frac{C_x m\pi}{L_2}\right)\cos\left(\frac{l\pi x}{L_1}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right)e^{i(kz-\omega t)}. \tag{4.3}$$

Wir sehen hier, dass es so aussieht als seien Hohlleiterwellen nicht transversal. Stimmt dies?

Wir könnten $E_z = 0$ auf dreierlei Art erzwingen: i) wir setzen $l = 0$ (und $m \neq 0$ sonst hätten wir kein Feld mehr). Dann ist auch $E_y = 0$ und $E_x = C_x \sin\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right) e^{i(kz-\omega t)}$und $B_z = \frac{iC_x m\pi}{\omega L_2} \cos\left(\frac{m\pi y}{L_2}\right) e^{i(kz-\omega t)}$. Um das longitudinale B- Feld wegzubekommen müssten wir jetzt $C_x = 0$ setzen - dann haben wir aber kein Feld mehr ii) analog können wir $m = 0$ setzen. Dann ist die Welle in y- Richtung polarisiert und iii) wir können $C_z = 0$ setzen. Wenn wir jetzt aus Gl. (4.3) auch noch $B_z = 0$ fordern, dann ensteht ein Widerspruch zu Gl. (4.2). Es gibt also keine rein transversalen Wellen in diesem Wellenleiter! Die Moden mit E_z heißen transversal elektrische Moden und werden mit TE_{lm} gekennzeichnet. Da wenigstens einer der Koeffizienten größer als null sein muss, haben diese Moden eine untere Grenzfrequenz und eine nichtlineare Dispersion $k(\omega)$.

Alternativ können wir fordern, dass $B_z = 0$ ist - in diesem Fall sprechen wir dann von TM (transversal magnetischen) Wellen. Für diese Moden brauchen wir gemäß Gl. (4.3) $C_y = L_1 m C_x / l$. Damit folgt aus der Divergenzfreiheit Gl. (4.2) dass $C_z = \frac{l\pi}{ikL_1} C_x$. Damit ist klar, dass auch $E_z \neq 0$ sein kann. Details der TM Moden werden in den Übungen diskutiert.

Die longitudinalen Feldkomponenten werden natürlich von den Ladungen in den leitfähigen Wänden induziert, die gebraucht werden, um die Randbedingunen aufrecht zu erhalten. Diese Situation ist sehr unbefriedigend - die Schnittstelle zu freien Wellen dürfte kompliziert ausfallen und es gibt eine, praktisch bei dünnen Wellenleitern oft sehr hoch liegenden, untere Grenzfrequenz.

Um diesem Phänomen auf die Schliche zu kommen und einen Ausweg zu finden, diskutieren wir einen Wellenleiter beliebigen Querschnitts. Wir machen für die Felder den Ansatz $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(x, y) e^{i(kz-\omega t)}$, $\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}(x, y) e^{i(kz-\omega t)}$. Die Wellengleichung ist damit

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \vec{E}(x, y) = 0 \tag{4.4}$$

Für TEM-Moden, also für Moden bei denen die Welle immer transversal ist, ist außerdem $E_z, B_z = 0$. Daraus folgt dass

$$i\omega B_z = \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right)_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

und die Divergenzbedingung ist

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0.$$

Damit erhalten wir

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 E_x}{\partial^2 x}$$

damit erfüllt das trasversale Feld $\vec{E}(x, y)$ die zweidimensionale Laplacegleichung $\Delta_2 \vec{E}(x, y) = 0$. Dies hat zwei profunde Konsequenzen. Zum Einen folgt damit aus der Wellengleichung (4.4) dass die Dispersion der TEM mode einfach $\omega = c|k|$ ist. Zum Anderen bedeutet das, dass die transversale Komponente eine Lösung der zweidimensionalen Laplacegleichung ist, bzw. die Lösung der dreidimensionalen Laplacegleichung mit Translationssymmetrie in z- Richtung, entlang des Wellenleiters. Es handelt sich um ein Dirichlet-Problem mit konstanter Randbedingung auf der Oberfläche. Die eindeutige Lösung dieses Problems ist $\phi = \text{const.}$ also $\vec{E} = 0$. Wir möchten das verdeutlichen, und den Ausweg zeigen, indem wir das Beispiel eines zylindrischen Hohlleiters vom Radius r_1 lösen. Die zweidimensionale Laplacegleichung ist dann

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Für dieses rotationssymmetrische Problem verschwindet der zweite Term. Für $r > 0$ können wir darum sofort schreiben

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \phi}{\partial r}\right) = 0.$$

Darum ist, mit einer Integrationskonstante ϕ_0

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\phi_0}{r}$$

und wir finden

$$\phi(r) = \phi_0 \log \frac{r}{r_0}$$

was wir ja schon als typische Lösung eines zylindrischen Problems gesehen haben. Hier sehen wir das Problem: Dieser Ausdruck divergiert am Ursprung, darum muss $\phi_0 = 0$ sein. Wir sehen also: Es gibt in Hohlleitern deshalb keine TEM-Moden, weil diese ein unendliches Feld im Zentrum des Hohlleiters hätten. Der Ausweg ist, einen weiteren zylindrischen Leiter um den Ursprung bei einem kleienren Radius r_2 einzuführen. Wenn wir diesen offen lassen, das Potenzial also nicht festlegen, und den Mantel erden, erhalten wir $\phi(r) = \phi_0 \log r/r_1$ und das Potenzial ist ϕ_0 am Zentralleiter. Eine solche Anordnung heißt *Koaxialkabel* . Diese Koaxialkabel sind sehr gebräuchlich zur Signalübertragung z.B. zu Fernsehern. Mikrowellentechnik basiert entscheidend auf Koaxialleitungen und kombiniert auf ungewöhnliche Art und Weise die Physik von Stromkreisen mit der Wellenoptik.

Ein Element, das beide Welten kombiniert, ist das Konzept der Wellenimpedanz. Diese ist definiert

$$Z_0 = \mu_0 \frac{E_0}{B_0}.$$

Sie beschreibt also das Verhältnis der Feldkomponenten und kann auch bei verlustfreier Übertragung (die wir hier haben, da keine Ladungen vorliegen) ist diese im Allgemeinen reell und endlich. Im Vakuum haben wir $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \simeq$

377Ω. Den Zusammenhang zwischen der Wellenimpedanz und der elektrischen Impedanz werden Sie in den Übungen analysieren.

Der Energietransport entlang der Leitung ist wiederum durch den Poyntingvektor gegeben, $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B}$. Für TE und TM-Moden spielt hier die longitudinale Komponente keine Rolle - Energiefluss senkrecht zu z .